

MATEMÁTICA

Conceptos y Propiedades básicas

Presentamos en este material una revisión de contenidos y herramientas fundamentales para abordar el estudio de la matemática en la carrera que elegiste.

Los temas que se desarrollan fueron trabajados durante la escuela secundaria. El objetivo es que puedas repasarlos y profundizar en su comprensión, de modo que inicies tu camino en el nivel universitario con una base sólida.

Es fundamental que recorras todo el material y realices cada una de las actividades propuestas. Esto te permitirá reconocer tus fortalezas y debilidades en relación con los distintos conceptos matemáticos abordados. Además, incluye ejemplos y ejercicios que te ayudarán a desarrollar habilidades y destrezas importantes para el progreso de tu pensamiento matemático.

El material se compone de cuatro capítulos, cada uno centrado en un tema principal y dividido en secciones donde se trabajan conceptos y herramientas relacionadas. Al finalizar cada sección encontrarás actividades destinadas a revisar los contenidos abordados y comprobar si lograste comprenderlos correctamente. Las respuestas a los ejercicios de cada sección se encuentran al final de cada capítulo.

Esperamos que este material te resulte de ayuda para comenzar esta nueva etapa con cimientos firmes.

Docentes de Matemática

Ingeniería Agronómica
Matemática - Ingreso

CONCEPTOS Y PROPIEDADES BÁSICAS

- 1. Números reales**
- 2. Expresiones algebraicas**
- 3. Ecuaciones e inecuaciones**

1. Números reales

En este apartado se desarrollan algunos conceptos básicos que se refieren al conjunto de los números reales.

1.1 El conjunto de los números reales

En la vida diaria se utilizan los *números reales* para describir diversas cantidades, como sueldos, porcentajes, temperaturas, volúmenes, tasa de crecimiento, entre otras.

Algunos números reales son: -23 ; 0 ; $0,3333\dots$; $\frac{3}{2}$; $\sqrt{7}$; $4,6$; $10,234178\dots$; 115

Al conjunto de los números reales se llega por sucesivas ampliaciones del campo numérico a partir de los números naturales.

El conjunto de los números naturales (N) es el formado por los números que se usan para contar.

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Si se unen el cero y los números negativos se obtiene el conjunto de los números enteros (Z).

$$Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

El conjunto de los números naturales está incluido en el conjunto de los números enteros. Los números enteros permiten resolver problemas que requieren números positivos y negativos, como por ejemplo temperaturas sobre o bajo cero, pérdidas o ganancias. Pero no son suficientes para resolver todos los problemas. Si se busca, por ejemplo, expresar qué parte de un peso son 45 centavos, es necesario extender el conjunto de números para incluir a los números racionales, como $\frac{45}{100}$ o $0,45$, que es la respuesta a la pregunta anterior.

Se define el conjunto Q de los números racionales de la siguiente manera:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b}, \text{ tales que } a \text{ y } b \text{ son números enteros y } b \neq 0 \right\}$$

El conjunto de los números racionales incluye al conjunto de números enteros $4 = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = \dots$

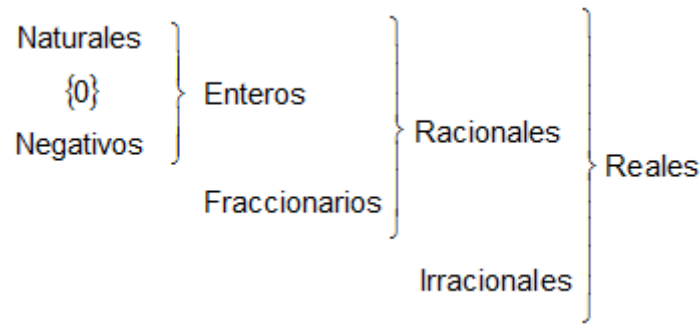
Todo número racional se puede expresar como un número decimal exacto $\left(\frac{7}{2} = 3,5; \frac{1}{8} = 0,125\right)$ o como un número decimal periódico, es decir con infinitas cifras decimales que se repiten $\left(\frac{7}{9} = 0,777\dots = 0,\hat{7}; \frac{19}{6} = 3,16666\dots = 3,1\hat{6}\right)$.

Con los números racionales se puede sumar, restar, multiplicar y dividir $\left(\frac{a}{b} \text{ si } b \neq 0\right)$. Si bien el conjunto de los números racionales tiene muy buena estructura para realizar las diferentes operaciones quedan algunas situaciones que no se pueden considerar dentro de él ($\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi$, entre otros).

Surgen los números irracionales para dar respuesta a estas instancias.

Los números irracionales (I) se pueden expresar como números decimales de infinitas cifras decimales no periódicas.

Los números irracionales unidos a los racionales definen el conjunto de los números reales (R).



Operaciones con números reales. Propiedades

Los números reales se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (excepto por cero). El resultado es siempre otro número real.

Dados tres números reales cualesquiera, a , b y c , se verifican las siguientes propiedades:

- | | | |
|--------------------------------------|-----------------------------|--|
| • Propiedad conmutativa | $a + b = b + a$ | , $a \cdot b = b \cdot a$ |
| • Propiedad asociativa | $a + (b + c) = (a + b) + c$ | , $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ |
| • Elemento neutro o identidad | $a + 0 = a$ | , $a \cdot 1 = a$ |
| • Elemento inverso | $a + (-a) = 0$ | , $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$ si $a \neq 0$ |

Al inverso multiplicativo de un número real diferente de cero, se lo llama también recíproco del número y se lo escribe como a^{-1} . Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Ejemplo. $3^{-1} = \frac{1}{3}$; $\left(\frac{9}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{9}$

- | | |
|---------------------------------|---|
| • Propiedad distributiva | $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ |
|---------------------------------|---|

A partir de la suma de números reales, se define la resta:

$$a - b = a + (-b)$$

De manera similar, se define la división en términos de la multiplicación. Si $b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, se verifica que $a : b = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right) = a \cdot b^{-1}$

Dados a , b , c y d , números reales cualesquiera, otras propiedades importantes son:

- | |
|---|
| • $a \cdot 0 = 0$ para todo número real a |
| • Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$ |
| • $a = b$ si y sólo si $a + c = b + c$ |
| • Si $c \neq 0$, se cumple $a = b$ si y sólo si $a \cdot c = b \cdot c$ |
| • $-(-a) = a$ |
| • $-(a + b) = -a - b$ |
| • $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$ |
| • Si $a \neq 0$, se cumple que $(a^{-1})^{-1} = a$ |
| • Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, se verifica $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ |

Se usa $\frac{a}{b}$ para escribir $a : b$ y representa el cociente de a y b o la fracción a sobre b . Los números a y b son el numerador y denominador respectivamente de la fracción. La división por cero no está definida, por eso el conjunto de los números reales no es cerrado con respecto a la división.

Se cumplen las siguientes propiedades siempre que todos los denominadores sean números reales distintos de cero:

Ejemplos

• $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $a \cdot d = b \cdot c$	$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ porque $3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$
• $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{a}{b}$	$\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4}$
• $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$	$\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4}$
• $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$	$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{4 \cdot 3} = \frac{17}{12}$
• $\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{21}{20}$
• $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	$\frac{3}{4} : \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$

Potenciación y radicación

Si a es un número real y n es un número natural, entonces: $a^n = a \cdot a \cdot a \dots a$ (n veces). El número n se llama exponente y el número real a se llama base.

Siendo a cualquier número real distinto de cero, se verifica: $a^0 = 1$.

La expresión 0^0 no está definida.

Se puede ampliar la definición para exponentes negativos. Para todo número real a distinto de cero:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

La potenciación cumple las siguientes propiedades (siempre que la potencia esté definida):

Ejemplos

• Producto de potencias de igual base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$3^2 \cdot 3^3 = 3^5 = 243$
• Cociente de potencias de igual base: $a^m : a^n = a^{m-n}$	$2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$
• Potencia de otra potencia: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$
• Propiedad distributiva: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $(a : b)^n = a^n : b^n$	$30^3 = (3 \cdot 10)^3 = 3^3 \cdot 10^3 = 27 \cdot 1000 = 27\,000$ $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

Si n es un número natural y a y b son números reales, entonces: $\sqrt[n]{a} = b$, si y sólo si $b^n = a$. Si n es par, para que la raíz sea un número real, debe ser $a \geq 0$. El número b se llama radicando y el número natural n se llama índice de la raíz.

Algunas expresiones con radicales se pueden escribir como potencias de exponente fraccionario:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, siempre que a es tal que la raíz es un número real.

Si m y n son números naturales y a y b son números reales para los cuales existen las raíces indicadas, se verifica:

Ejemplos

- $(\sqrt[n]{a})^n = a$
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ($b \neq 0$)
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
- Si n es par: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$
Si n es impar: $\sqrt[n]{a^n} = a$

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{5})^3 &= 5 \\ \sqrt[3]{216} &= \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6 \\ \sqrt[3]{\frac{8}{27}} &= \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3} \\ \sqrt{\sqrt[3]{64}} &= \sqrt[2 \cdot 3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2 \\ \sqrt[4]{(-3)^4} &= |-3| = 3 \\ \sqrt[5]{-32} &= \sqrt[5]{(-2)^5} = -2 \end{aligned}$$

Logaritmo

Sean a, b y n tres números relacionados de manera que: $a^n = b$.

Sabemos que la operación entre a y n es una potencia. Conocidos a y n, podemos calcular aplicando definición el valor de b.

Por ejemplo, si $a = 2$ y $n = 3$, se verifica que $2^3 = b \Rightarrow 8 = b$.

En cambio, si los datos son b y n, para calcular el valor de la base a, es necesario utilizar la radicación:

$$a^n = b \Rightarrow a = \sqrt[n]{b}.$$

Para el caso planteado, sabiendo que $n = 3$ y $b = 8$, resulta $a^3 = 8$, de donde $a = \sqrt[3]{8} = 2$.

Ahora bien, si tenemos como datos a y b, y queremos calcular el exponente n, ¿qué debemos hacer?

Siguiendo con el mismo ejemplo, si $a = 2$ y $b = 8$, ¿cuál es el exponente al que debo elevar a 2, para que el resultado de esa potencia sea 8?

Esto se puede expresar simbólicamente como: $2^x = 8$.

Si encontramos ese valor de x, tendremos la respuesta a la pregunta.

Sabemos que ese número es 3, ya que $2^3 = 8$. Sin embargo, no siempre es posible calcular fácilmente debido a que puede haber potencias cuyo resultado no es un número entero o incluso que no pueda expresarse como una potencia exacta. En esos casos, necesitamos utilizar el concepto de logaritmo.

El logaritmo de un número es el exponente al que hay que elevar un número fijo, llamado base, para que el resultado sea ese número.

De esta manera, el logaritmo de 8 en base 2 es igual a 3, $\log_2 8 = 3$, ya que $2^3 = 8$.

Definición.

Sean a y b números reales positivos y $a \neq 1$, diremos que n es el logaritmo en base a de b si y sólo si a elevado a la n es igual a b .

En símbolos:

$$\log_a b = n \Leftrightarrow a^n = b$$

La expresión $\log_a b$ se lee: "logaritmo en base a de b ".

Se observa que a es la base, b el argumento y n el logaritmo.

Ejemplos.

$$\log_3 81 = 4 \text{ porque } 3^4 = 81$$

$$\log_6 \frac{1}{36} = -2 \text{ porque } 6^{-2} = \frac{1}{36}$$

La expresión simbólica de la definición de logaritmo dice que ambas igualdades son equivalentes, es decir, la expresión en la forma logarítmica a la izquierda es equivalente a la expresión de la derecha a la que se llama expresión exponencial.

La siguiente tabla muestra varios ejemplos:

Forma logarítmica $\log_a b = n$	Forma exponencial $a^n = b$
$\log_5 25 = 2$	$5^2 = 25$
$\log_3 \frac{1}{27} = -3$	$3^{-3} = \frac{1}{27}$
$\log_4 1 = 0$	$4^0 = 1$

Logaritmos decimales y naturales

Existen logaritmos que aparecen en muchas aplicaciones. Uno de ellos es el logaritmo decimal, cuya base es 10. Por convención se omite el número 10 en la base, de modo que se escribe simplemente $\log b$ en lugar de $\log_{10} b$.

Ejemplos.

$$\log(100) = 2 \text{ pues } 10^2 = 100$$

$$\log(0,001) = -3 \text{ pues } 10^{-3} = 0,001$$

Otro logaritmo importante es el logaritmo natural o neperiano, cuya base es el número e (número irracional, $e \cong 2,7182\dots$), muy usado en las ciencias naturales. En este caso, la convención es usar el símbolo $\ln b$ en lugar de $\log_e b$.

Ejemplos.

$$\ln(100) = 4,6051$$

$$\ln(500) \cong 6,2146$$

Los logaritmos neperianos, así como los decimales, se pueden obtener con una calculadora científica. Las teclas respectivas son $\boxed{\ln}$ y $\boxed{\log}$

¿Cómo realizar el cálculo de un logaritmo en donde la base no sea ni 10 ni el número e?

Cambio de base de un logaritmo

Si se desea calcular, por ejemplo, $\log_3 5$, no todas las calculadoras permiten hacerlo en forma directa. Para ello se debe realizar un cambio de base hacia una base conocida, como 10 o base e. Esta propiedad del cambio de base se enuncia de manera general así:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Para el caso planteado podemos calcular $\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} = \frac{\ln 5}{\ln 3} \cong 1,46$

Nota. Es indistinto realizar el cambio de base utilizando la base 10 o la base e, ya que el resultado será el mismo. Lo importante es mantener la misma base en el numerador y el denominador al aplicar la fórmula.

Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos cumplen propiedades algebraicas especiales que históricamente los han hecho indispensables para los cálculos y aún en la actualidad los hacen valiosos en muchas áreas de aplicación.

Sean a, b y c números reales positivos y $a \neq 1$. Como consecuencia inmediata de la definición se deduce:

- El logaritmo de la unidad es cero: $\log_a 1 = 0$.
- El logaritmo de la base es uno: $\log_a a = 1$.
- Por ser la potencia y el logaritmo operaciones inversas: $a^{\log_a x} = x$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$.
- El logaritmo de una potencia de la base es el exponente: $\log_a a^x = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Si los logaritmos de dos números en la misma base son iguales, entonces los números han de ser también iguales. Si $\log_a x = \log_a y$ entonces $x = y$.

Otras propiedades importantes son:

- Logaritmo de un producto.

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores
 $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

- Logaritmo de un cociente

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor:
 $\log_a (b : c) = \log_a b - \log_a c$

- Logaritmo de una potencia

El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Ejemplo.

Utilizando propiedades, calcule:

a) $\log_6 1$ b) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{5}$ c) $4^{\log_4 30}$ d) $\log_3 3^7$ e) $10^{\log 5+1}$

Solución.

a) $\log_6 1 = 0$ El logaritmo de 1 en cualquier base es 0.

Por definición de logaritmo, se comprueba que $6^0 = 1$.

b) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{5} = 1$ $\log_a a = 1$

Aplicando definición de logaritmo se verifica que $(\sqrt{5})^1 = \sqrt{5}$.

c) $4^{\log_4 30} = 30$ $a^{\log_a x} = x$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$

d) $\log_3 3^7 = 7$ $\log_a a^x = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$

e) $10^{\log 5+1} = 10^{\log 5} \cdot 10^1$ Teniendo en cuenta la propiedad de las potencias $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$10^{\log 5+1} = 5 \cdot 10 = 50$ Por ser la potencia y el logaritmo operaciones inversas, el primer factor es 5.

Ejemplo.

Aplice las propiedades de logaritmos para desarrollar la expresión $\log_5 (4x^3)$

Solución.

Aplicando la propiedad del logaritmo de un producto, resulta:

$$\log_5 (4x^3) = \log_5 4 + \log_5 x^3$$

En el segundo término del segundo miembro, aplicando la propiedad del logaritmo de una potencia, se obtiene:

$$\log_5 4 + \log_5 x^3 = \log_5 4 + 3 \cdot \log_5 x$$

Por lo tanto, $\log_5 (4x^3) = \log_5 4 + 3 \cdot \log_5 x$

Ejemplo.

Escribir cómo un único logaritmo la expresión $\frac{1}{2} \log_3 x - 4 \log_3 y$

Solución.

Aplicando la propiedad de una potencia en ambos términos se obtiene

$$\frac{1}{2} \log_3 x - 4 \log_3 y = \log_3 x^{\frac{1}{2}} - \log_3 y^4$$

Luego, por propiedad de un cociente: $\log_3 x^{\frac{1}{2}} - \log_3 y^4 = \log_3 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^4}$

Entonces, $\frac{1}{2} \log_3 x - 4 \log_3 y = \log_3 \frac{\sqrt{x}}{y^4}$

Aproximaciones

Todo número real (racional o irracional) se puede representar como un número decimal. En la práctica, la representación decimal de los números con infinitas cifras decimales está dada como aproximación.

Por ejemplo, si se utiliza el símbolo $\approx$ para expresar “aproximadamente igual a”, se escribe: $\pi \approx 3,14159$ o $\sqrt{3} \approx 1,73205$.

Al aproximar decimales, se **redondea** o se **trunca** a un número específico de lugares decimales.

Para **truncar** un número decimal se deben eliminar todas las cifras que siguen a la cifra final según la cantidad de lugares decimales que se desean.

Para **redondear** un número decimal se debe identificar la última cifra decimal según la cantidad de lugares decimales que se desean. Si la siguiente cifra es 5 o más, la cifra anterior se incrementa en 1. Si la siguiente cifra es 4 o menos, se deja la última cifra como está.

Ejemplo.

Aproxime 16,87653 a dos lugares decimales,

a) truncando

b) redondeando

Para 16,87653 la cifra final es 7, ya que se deben considerar dos lugares decimales.

a) Para truncar, se eliminan todas las cifras decimales que siguen a la cifra final 7. El truncado de 16,87653 a dos lugares decimales es 16,87.

b) La cifra que sigue a la cifra final 7 es 6. Como 6 es mayor a 5, se suma 1 a la cifra final 7. La forma redondeada de 16,87653 es 16,88.

Ejemplo.

a) Realice un truncado hasta la décima, centésima y milésima del siguiente número decimal: 3,2752.

A la décima $\rightarrow 3,2$

A la centésima $\rightarrow 3,27$

A la milésima $\rightarrow 3,275$

b) Redondee a la décima, a la centésima y a la milésima el siguiente número decimal: 3,2752.

A la décima $\rightarrow 3,3$

A la centésima $\rightarrow 3,28$

A la milésima $\rightarrow 3,275$

Notación científica

Cualquier número positivo puede escribirse en notación científica:

$$a \cdot 10^n \quad \text{donde } 1 \leq a < 10 \text{ y } n \text{ es un número entero}$$

Frecuentemente se utiliza la notación científica para escribir números muy grandes o muy pequeños de una manera conveniente.

Ejemplo. Una célula vegetal puede contener 208 000 000 000 000 moléculas, cantidad que puede escribirse como $2,08 \cdot 10^{14}$. El exponente positivo 14 indica que al mover la coma en 2,08, 14 lugares hacia la derecha se obtiene la forma decimal del número.

Ejemplo. La masa de una molécula de oxígeno es aproximadamente 0,000 000 000 000 000 000 053, que en notación científica se escribe $5,3 \cdot 10^{-23}$. El exponente negativo -23 indica que al mover la coma en 5,3, 23 lugares hacia la izquierda se obtiene la forma decimal del número.

Ejemplos. Conversión a notación científica y viceversa.

a) 16 000 000 a notación científica.

Para que esté escrito en notación científica, se considera 1,6 (ya que este número debe ser mayor o igual a 1 y menor que 10) y se multiplica por 10^7 debido a que se debe mover la coma 7 lugares a derecha, para obtener el número dado. Entonces, $16\,000\,000 = 1,6 \cdot 10^7$

b) $2,47 \cdot 10^{-7}$ a forma decimal.

El exponente -7 indica que se debe correr la coma en 2,47, 7 lugares hacia la izquierda obteniéndose así 0, 000 000 247. Entonces, $2,47 \cdot 10^{-7} = 0,000\,000\,247$.

1.2 Razones y proporciones

Una **razón** es una comparación de dos cantidades. Si estas cantidades se representan por los valores a y b, entonces la razón con que se comparan a y b se escribe como $\frac{a}{b}$ o $a : b$, siendo $b \neq 0$.

La razón $\frac{a}{b}$ se lee “a es a b” e indica, en forma de división, la relación entre dos cantidades a y b. Nos indica cuántas unidades hay en relación a las otras y se suele indicar simplificando la fracción o como expresión decimal.

El primer número es el antecedente de la razón y el segundo, el consecuente.

Ejemplo.

La densidad es la cantidad de materia que hay en un determinado espacio. Se define como la cantidad de masa de una sustancia por unidad de volumen.

De esta manera, la densidad (δ) de una sustancia es la razón entre la masa (m) y el volumen (V) de dicha sustancia.

$$\text{densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} \Rightarrow \delta = \frac{m}{V}$$

La densidad es una propiedad física intensiva, es decir, es una característica de las sustancias que no depende de la cantidad de la misma.

En la física de suelos, se *define densidad del suelo o densidad aparente* como la relación entre la cantidad de sólidos y el volumen total del suelo.

El valor de la densidad aparente permite caracterizar físicamente el suelo, es decir la relación entre sólidos y espacio poroso. Se utiliza como indicador de diagnóstico, ya que dependiendo de la textura del suelo, existen densidades aparentes ideales para cada una de ellas.

Se calcula con la razón entre la masa de sólido (M_s) y el volumen total (V_t) del suelo.

$$\delta_a = \frac{M_s}{V_t}$$

Para determinar la densidad aparente, se utiliza el método del cilindro, mediante el cual se extrae una muestra de suelo no perturbada. Se llevan las muestras al laboratorio y se utiliza la estufa para extraer toda la humedad, y posteriormente el desecador para enfriarlas. Al realizar la pesada, se obtiene la masa de suelo seco.

Se extrajo una muestra de suelo con un cilindro de $99,8 \text{ cm}^3$ de volumen. Al realizar la pesada, se obtuvo $123,67 \text{ g}$ de suelo seco. La densidad aparente es:

$$\delta_a = \frac{\text{Masa de suelo seco}}{\text{Volumen del cilindro}} = \frac{123,67 \text{ g}}{99,8 \text{ cm}^3} = 1,24 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Ejemplo.

Un campo posee 320 hectáreas sembradas con diferentes cultivos como indica la siguiente tabla:

Cultivo	Superficie sembrada (Ha)
Soja	180
Maíz	84
Trigo	56

Al calcular la razón entre la cantidad de hectáreas sembradas con soja y el total de hectáreas sembradas se obtiene $\frac{180}{320} = \frac{9}{16} = 0,5625$.

En este caso, como se comparan cantidades que tienen la misma unidad, la razón es un número (sin unidad).

La razón calculada indica que 180 de 320 hectáreas del campo son de soja, que 9 por cada 16 hectáreas del campo son de soja o que la cantidad de hectáreas de soja es 0,5625 veces la cantidad de hectáreas sembradas (algo más que la mitad).

De manera análoga podemos calcular la razón entre la cantidad de hectáreas sembradas con maíz y el total de hectáreas: $\frac{84}{320} = \frac{21}{80} = 0,2625$, mientras que la razón entre la cantidad de hectáreas sembradas con trigo y el total es $\frac{56}{320} = \frac{7}{40} = 0,175$.

Se denomina **proporción** a la igualdad de dos razones. Dados números reales a , b , c , d , con b y d distintos de cero, forman una proporción cuando la razón entre los dos primeros es igual a la razón de los dos últimos. En símbolos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ siendo } b \neq 0, d \neq 0$$

a y d se denominan extremos; b y c medios y se lee “ a es a b como c es a d ”.

Ejemplo.

$2 : 5$ y $8 : 20$ forman una proporción, ya que la razón entre 2 y 5 es la misma que la razón entre 8 y 20, es decir $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$

Propiedad fundamental de las proporciones

En toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos. En símbolos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Ejemplos.

$$\text{a) } \frac{3}{8} = \frac{9}{24} \Rightarrow 3 \cdot 24 = 8 \cdot 9 \Rightarrow 72 = 72 \quad \text{b) } \frac{4}{0,2} = \frac{10}{0,5} \Rightarrow 4 \cdot 0,5 = 0,2 \cdot 10 \Rightarrow 2 = 2$$

Ejemplo.

Halle el valor de x en la siguiente proporción: $\frac{5}{4} = \frac{9}{x}$.

Solución.

Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones se obtiene que $5 \cdot x = 4 \cdot 9 \Rightarrow 5x = 36$

Despejando x se tiene que $x = 36 : 5$. Por lo que $x = 7,2$.

Ejemplo.

Para fertilizar una plantación de maíz se requiere incorporar nitrógeno al cultivo. La razón entre la cantidad de hectáreas de maíz y los kilos suministrados de nitrógeno es 3 : 60. Si hay 240 hectáreas plantadas de maíz, ¿cuántos kilogramos de nitrógeno se necesita para fertilizar ese cultivo?

Solución.

Sea x la cantidad de kilogramos de nitrógeno que se necesita para fertilizar, como debe mantenerse la relación entre las cantidades, se obtiene la siguiente proporción $\frac{3}{60} = \frac{240}{x}$.

Luego, despejando x y realizando los cálculos se tiene

$$3 \cdot x = 240 \cdot 60 \Rightarrow 3x = 14\,400 \Rightarrow x = 14\,400 : 3. \text{ Por lo que } x = 4\,800.$$

Respuesta. Se necesitan 4800 kilogramos de nitrógeno para fertilizar ese cultivo.

Ejemplo.

Si la razón entre el ancho y el largo de un terreno rectangular es 5 : 7, ¿cuál es el área del terreno si el largo es de 35 m?

Solución.

Para poder calcular el área de un terreno es necesario conocer las dimensiones del mismo. Si se llama x al ancho del terreno, planteando la proporción se obtiene que $\frac{5}{7} = \frac{x}{35}$.

Luego, despejando x se tiene $\frac{5}{7} \cdot 35 = x \Rightarrow 25 = x$. Por lo tanto, el ancho del terreno es de 25 m.

Ahora bien, el área es $25 \cdot 35 = 875 \text{ m}^2$.

Porcentajes

Los números fraccionarios o decimales se expresan a veces como porcentajes. Literalmente, porcentaje significa partes por cien. En general, a % significa "a partes de 100", y es, simplemente, otra manera de escribir $\frac{a}{100}$.

Ejemplo. 37 % representa 37 de cada 100 unidades. Por eso puede expresarse como la fracción $\frac{37}{100}$, que equivale al número decimal 0,37.

El concepto de porcentaje proviene de la necesidad de comparar dos números entre sí de manera relativa, es decir, se desea saber qué fracción o proporción de uno representa respecto del otro. De esta forma, podemos observar que el porcentaje se escribe para comparar una cantidad con 100.

Ejemplo. En el almacenamiento de granos, la humedad es un factor limitante tanto para asegurar la calidad como para determinar el tiempo de almacenamiento. Por eso es fundamental conocer el porcentaje de humedad que contiene cada grano. Según especialistas, los parámetros óptimos de humedad en un silo son 14,5 % para el maíz y 13 % para la soja. Expresa el significado de estos porcentajes.

Solución.

14,5 % significa $\frac{14,5}{100}$, por lo que se puede expresar que, cada 100 kg de maíz, 14,5 kg son de agua.

13 % significa $\frac{13}{100}$, por lo que se puede expresar que, cada 100 kg de soja, 13 kg son de agua.

Se puede trabajar con otras unidades, o considerar como total otra cantidad, en cuyo caso se deben calcular las proporciones correspondientes.

Ejemplo.

En una elección en la que se emitieron 1 445 300 votos, un candidato obtuvo 737 103 votos; en la siguiente elección se emitieron 1 614 225 votos y dicho candidato obtuvo 774 828 votos. ¿Han mejorado los resultados de este candidato entre una y otra votación?

Solución.

Dado que la cantidad de votantes fue diferente en cada votación, para poder analizar si ha mejorado los resultados, es necesario comparar las razones correspondientes a la cantidad de votos del candidato con respecto a la cantidad de votos emitidos.

En la primera votación la razón de votos obtenida es $\frac{737\ 103}{1\ 445\ 300} = \frac{51}{100}$; mientras que en la segunda votación $\frac{774\ 828}{1\ 614\ 225} = \frac{48}{100}$.

Entonces, el candidato obtuvo el 51 % de los votos emitidos en la primera votación y luego el 48 %. El uso de los porcentajes permite conocer el número de votantes que recibió el candidato por cada 100 votantes, y comprobar de manera inmediata que el candidato no ha mejorado sus resultados entre una y otra votación.

Ejemplo. Se tiene 18 litros de una mezcla con alcohol al 25 % contenida en un recipiente. ¿Cuántos litros de alcohol puro contiene la mezcla?

Solución. Si la mezcla contiene alcohol al 25 %, significa que un litro de mezcla o solución contiene 0,25 litros de alcohol. Para calcular la cantidad de alcohol que hay en los 18 litros de mezcla, se debe hacer:

$$\text{Cantidad de alcohol} = \text{Porcentaje de pureza} \cdot \text{Cantidad de solución}$$

En este caso: $25 \% \cdot 18 \text{ litros} = 0,25 \cdot 18 \text{ litros} = 4,5 \text{ litros}$

Respuesta. La mezcla contiene 4,5 litros de alcohol.

Ejemplo. El administrador de una oficina necesita determinar una fórmula para calcular el nuevo salario de los empleados que han recibido un 9 % de aumento. ¿Cuál será el nuevo salario de un empleado cuyo salario anterior era de \$ 560 000?

Solución. Llamando s al salario anterior del empleado, dado que el aumento será del 9 %, se puede escribir como $\frac{9}{100}s$, o directamente $0,09s$.

Luego el nuevo salario será: $s + 0,09s = 1,09s$

Entonces, para el empleado cuyo salario anterior era \$ 560 000, calculamos $1,09 \cdot 560\,000 = 610\,400$

Respuesta. Para el empleado cuyo salario era anteriormente \$ 560 000, el nuevo salario es \$ 610 400.

Ejemplo. Por pagar en efectivo, Juan abonó \$ 48 450, por una compra de \$ 57 000. ¿Cuál fue el porcentaje de descuento?

Solución. La cantidad que se descontó fue de $57\,000 - 48\,450 = 8\,550$

Para calcular qué parte es esta cantidad de la cantidad original se hace $\frac{8\,550}{57\,000} = 0,15$

El número decimal 0,15 puede expresarse como la fracción $\frac{15}{100}$, que representa que cada \$ 100 se descontaron \$ 15. Es decir, el 15 %.

Respuesta. El porcentaje de descuento fue del 15 %.

ACTIVIDADES SECCIÓN 1.1 - 1.2

1) Clasifique los siguientes números teniendo en cuenta el o los conjuntos numéricos a los que pertenecen: -9 ; $0,15$; $\sqrt{7}$; π ; $2,3444\dots$; $\frac{16}{9}$.

2) Calcule: a) $-\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{8}\right)$ b) $\frac{5}{6} - \left(-\frac{2}{3}\right)$ c) $\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)$ d) $\frac{2}{3} : \left(-\frac{3}{4}\right)$

3) Complete con menor (<), mayor (>) o igual (=) según corresponda, utilizando las propiedades de los números reales:

a) $\sqrt{(-4)^2} \dots -4$ b) $\sqrt[3]{(-5)^3} \dots -5$ c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} \dots 9$

d) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} \dots \sqrt{5}$ e) $\frac{1}{\sqrt{5}} \dots \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$ f) $\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \dots \frac{\sqrt{7}}{2}$

g) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \dots \sqrt{3}$ h) $6^{\frac{1}{4}} : 6^{\frac{1}{2}} \dots 6^{\frac{1}{4}}$ i) $(27)^{-\frac{4}{3}} \dots 3^{-4}$

4) Escribe como única potencia y luego resuelve:

a) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^5 : \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} =$ b) $\left[\left(\frac{1}{7}\right)^3 \cdot 7^3\right]^2 =$

c) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \cdot 2^{-7} =$ d) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^3 : \left[\left(\frac{1}{3}\right)^5\right]^{-2} =$

5) Completa con el exponente para que se cumpla la igualdad:

a) $\frac{1}{25} = 5^{\dots}$ b) $-\frac{1}{8} = (-2)^{\dots}$ c) $[(2)^{-1}]^{\dots} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$ d) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3 : \left(-\frac{2}{3}\right)\right]^{\dots} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-8}$

6) Simplifica aplicando propiedades:

a) $\left[\left(\frac{1}{b}\right)^{-2}\right]^3 =$ b) $\frac{a^{-5}}{a^{-2}} =$ c) $\left[\left(-\frac{1}{a}\right)^{-3}\right]^{-1} : \left(-\frac{1}{a}\right)^2 =$ d) $\left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{-3} =$
e) $\left(\frac{1}{a}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-2} =$ f) $\left(\frac{a}{b}\right)^2 : \left(\frac{b}{a}\right)^{-1} =$ g) $\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{-2}\right]^3 : \left[\left(\frac{b}{a}\right)^4\right]^{-2} =$ h) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2 \cdot b^6 =$

7) El profesor devolvió el examen con cruces en los renglones donde había error para realizar una autocorrección. Explica los errores cometidos.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{7} : \frac{7}{2} = \\ & = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\right) : \frac{7}{2} = \quad \times \\ & = \frac{1}{3} \cdot 1 : \frac{7}{2} = \frac{7}{6} \quad \times \end{aligned}$$

8) Escribe = o $\neq$ en la línea punteada. Resuelve correctamente los ejercicios en donde escribiste $\neq$.

a) $\sqrt{\frac{25}{16}} - 1 \dots \sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{1}$ b) $\sqrt{-\frac{81}{25}} \dots -\frac{9}{5}$ c) $\sqrt{\frac{1}{9} \cdot \frac{25}{4}} \dots \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{\frac{25}{4}}$
d) $\sqrt{\frac{25}{81} \cdot \frac{16}{9}} \dots \sqrt{\frac{25}{81}} \cdot \sqrt{\frac{16}{9}}$ e) $\sqrt{\frac{9}{16}} + \sqrt{1} \dots \sqrt{\frac{9}{16} + 1}$ f) $\sqrt[3]{\frac{1}{32}} \dots \sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

9) Las siguientes expresiones representan errores frecuentes que suelen cometerse al operar. Para cada caso, encuentra ejemplos que prueben que:

a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}$ b) $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$ c) $\log\left(\frac{a}{b}\right) \neq \frac{\log a}{\log b}$
d) $\frac{1}{a+b} \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ e) $\sqrt{a^2 - b^2} \neq a - b$ f) $(\log a)^n \neq n \cdot \log a$

10) Tres recipientes contienen agua: el primero $\frac{50}{47}$ de litro, el segundo $\frac{62}{55}$ de litro y el tercero $\frac{33}{30}$ de litro. ¿Qué recipiente contiene menos agua y cuál más?

11) Calcule, si es posible, los siguientes logaritmos. Si no es posible, explique por qué.

a) $\log(1000)$ b) $\log_8(1)$ c) $\log_2(-2)$ d) $\ln(e^2)$
e) $\log_2(16)$ f) $\log_5(0,45)$ g) $\log_{-3}(4)$ h) $\ln(1/e)$

12) ¿Es cierto que $\log_6 1 = \log_{\frac{1}{3}} 1$? Justifique su respuesta.

13) Aplicando definición y/o propiedades, calcule:

a) $10^{\log 3}$ b) $\log 10^5$ c) $e^{2+\ln 3}$
d) $e^{\ln 2}$ e) $\ln e^{-3}$ f) $e^{1+\ln 5}$

14) En cada caso, escriba el logaritmo en forma exponencial:

a) $\log_2 8 = 3$ b) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$ c) $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$ d) $\log_{\frac{1}{100}} = -2$ e) $\ln 4 = 1,3863$

15) Escriba en forma logarítmica cada una de las siguientes expresiones:

a) $2^5 = 32$ b) $64^{\frac{1}{3}} = 4$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ d) $4^{\frac{3}{2}} = 8$ e) $e^2 = 7,3891$

16) Aplique propiedades del logaritmo para desarrollar las siguientes expresiones:

a) $\log_4 (x.z)$

b) $\log \frac{y}{x}$

c) $\log_2 \sqrt[3]{z}$

d) $\log_a \frac{y^5 w^2}{x^4 z^3}$

e) $\ln \sqrt[4]{\frac{x^7}{y^5 z}}$

f) $\log \frac{\sqrt[3]{z}}{x\sqrt{y}}$

17) Simplifique cada expresión al logaritmo de una sola cantidad:

a) $\ln 6 + \ln x$

b) $\log x - \log 5$

c) $2\log_3 x + \log_3 m$

d) $2 + \log_5 x$

e) $\frac{2}{3} \log_2 x - \log_2 y + \log_2 r$

f) $-\log_2 z - \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 y$

18) La intensidad (L) en decibels de un sonido de intensidad I se define por $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$, donde I_0 es la mínima intensidad detectable por el oído humano. Si un auto tiene un sonido con una intensidad I de 3 100 000 veces I_0 , calcule la intensidad en decibels del mismo.

19) La relación entre el número de decibels β y la intensidad I de un sonido, en watts por metro cuadrado, está dada por $\beta = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$. Use las propiedades de los logaritmos para escribir en forma más sencilla, y determine el número de decibels de un sonido con una intensidad de 10^{-6} watts por metro cuadrado.

20) El pH de una solución química está dado por la fórmula $\text{pH} = -\log [H^+]$ donde $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno en moles por litro. Los valores del pH van de 0 (ácido) a 14 (alcalino).

a) ¿Cuál es el pH de una solución para la que $[H^+]$ es 0,1?

b) ¿Cuál es el pH de una solución para la que $[H^+]$ es 0,01?

c) ¿Cuál es el pH de una solución para la que $[H^+]$ es 0,001?

d) ¿Qué ocurre con el pH cuando disminuye la concentración de iones de hidrógeno?

e) Determine la concentración de iones de hidrógeno en una naranja, si su pH es 3,5.

f) Determine la concentración de iones de hidrógeno en la sangre humana si el pH es 7,4.

21) Aproxime los números $\sqrt{11}$ y $\frac{17}{90}$, redondeando y truncando, con dos cifras decimales.

22) Si el lado de un triángulo equilátero mide $\sqrt{17}$ cm, halle:

a) el valor exacto del perímetro.

b) un valor aproximado del perímetro.

23) El área de un cuadrado es 35 cm^2 . Determine:

a) la medida exacta del lado del cuadrado.

b) un valor aproximado de la medida del lado del cuadrado.

24) Se desea plantar 100 plantines en el borde de un cantero circular de una plaza. Si los plantines se van a colocar cada 10 cm, ¿cuál debe ser la medida del radio del cantero?

a) Escriba el valor exacto.

b) Escriba un valor aproximado a los centésimos.

25) Escriba en notación científica los siguientes números:

a) 7 890 000 000

b) 0,0000034

c) 5 739 000

d) 0,000000000456

e) $135 \cdot 10^{10}$

f) $79 \cdot 10^{-10}$

26) El diámetro de los glóbulos rojos de la sangre es de aproximadamente $7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Calcule su superficie.

27) La superficie de siembra de soja declarada en Argentina durante la campaña 2021/2022 fue de aproximadamente 12 930 000 hectáreas y aumentó en 880 000 hectáreas con respecto a la campaña anterior. Expresa estas cantidades utilizando notación científica.

28) Escriba en notación científica las cantidades de cada expresión:

- a) El tamaño del átomo de hidrógeno es de 0,0000000001 metros.
- b) En promedio, una semilla de maíz mide 0,07 dm.
- c) El peso de una semilla de trigo, en promedio, es de 0,035 gramos.
- d) El volumen de agua de un reservorio es de 7 840 000 litros.

29) La masa de un protón es aproximadamente de $1,6 \cdot 10^{-24}$ g. ¿Cuántos protones se necesitan para igualar la masa de una persona de 72 kg?

30) Si la masa de una partícula es $4,3 \cdot 10^{-7}$ gramos, entonces ¿cuántos gramos corresponden a la masa de 5,48 millones de esas partículas? Redondee la cantidad de gramos a la décima, a la centésima y a la milésima.

31) Un tanque de agua cilíndrico posee una altura de 3,08 metros y un diámetro de 2,75 metros. Calcule la capacidad del tanque y redondee este valor a la décima, centésima y milésima.

32) Un plomero y su ayudante, reparten el pago de los arreglos realizados a razón 7 : 2. Si el plomero recibe \$ 210 000, ¿cuánto dinero recibe el ayudante?

33) El mapa indica que la escala en centímetros con que está hecho es 5 : 1000000 (esto significa que cada 5 cm del mapa representan 1 000 000 cm de distancia real). ¿Cuántos kilómetros de largo tiene en la realidad un río que en el mapa mide 18 cm?

34) La razón entre población y superficie se conoce (por los demógrafos) como densidad poblacional. Si en una región de $2\,500\text{ km}^2$ residen 352 400 habitantes, ¿Cuál es el valor de la densidad poblacional? ¿Qué significado posee?

35) Si la arista de un cubo aumentó un 10 %, ¿en qué porcentaje aumentará su volumen?

36) El contenido de humedad de una muestra de granos (en porcentaje), se determina mediante la fórmula $h = \frac{P_a}{P_{ms} + P_a} \cdot 100$, donde P_a es el peso del agua de la muestra (en kg) y P_{ms} es el peso de la materia seca de la muestra (en kg). Un productor entregó grano que contiene 520 kg de materia seca y 80 kg de agua. ¿Cuál es el porcentaje de humedad de la entrega?

37) En Argentina, la superficie ocupada con soja en la campaña 2020/2021 fue de aproximadamente 13,8 millones de hectáreas, concentrándose en la región pampeana aproximadamente el 84 % del área sojera.

a) ¿Cuál fue la superficie aproximada destinada a esta oleaginosa en las provincias extra pampeanas?

b) Si durante la campaña 2021/2022 la superficie implantada con soja alcanzó los 12,93 millones de hectáreas, ¿Cuál fue el porcentaje de caída con respecto a la superficie sembrada en el período anterior?

38) En la tabla se muestra el peso aproximado y las proporciones de las distintas partes que componen un grano de maíz:

Maíz	Peso (mgrs.)	Embrión (%)	Escutelo (%)	Pericarpio (%)	Endosperma (%)
	150-350	1,5	5-7	6-8	80-82

El endosperma o albumen constituye gran parte del peso del grano en madurez y representa el principal tejido de almacenamiento de almidón y proteína. Determine entre qué cantidades en miligramos puede variar el endosperma de una semilla de maíz que pesa 200 miligramos.

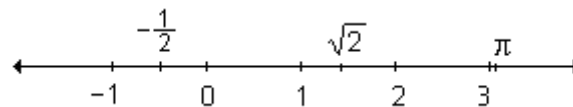
39) El sistema tradicional de producción de arroz en Entre Ríos es de siembra directa con maquinaria sobre suelo seco y luego irrigado. De un total de 320 productores, 200 de ellos siembra menos de 200 hectáreas y sólo 24 de ellos siembra más de 1 000 hectáreas. Indique qué porcentaje siembra menos de 200 hectáreas, entre 200 y 1 000 hectáreas y más de 1 000 hectáreas.

- 40)** La distancia media entre líneas de siembra de arroz es de 19,2 cm variando entre 15 y 21 cm. En un relevamiento realizado sobre 600 productores en la provincia de Entre Ríos, un 52 % de ellos sembró a 20 cm, un 15 % a 21 cm, un 21 % a 17,5 cm y el resto a 15 cm. ¿Cuántos productores sembraron en cada medida diferente?
- 41)** Un grupo de productores agrícolas compró una maquinaria agrícola y pagó el 35 % en efectivo en el momento de la entrega. El resto lo financió en cuatro cuotas, de modo tal que cada una era la mitad de la anterior. Calcular el precio de cada cuota, sabiendo que la maquinaria costó \$ 2 100 000
- 42)** Gracias a la revolución tecnológica un agricultor pudo aumentar su cosecha de soja en un 45 %. Basándose en esta nueva cifra, la siguiente cosecha fue un 20 % menor. ¿Sería el resultado igual si hubiera perdido primero un 20 % y después aumentado su producción en un 45 %?
- 43)** El precio de la bolsa de trigo aumentó del año pasado a éste un 56 % ¿Cuánto cuesta la bolsa actualmente, sabiendo que este año para comprar cinco bolsas se necesitaron \$23 520 más que el año pasado?

1.3 Los números reales y la recta real

Los números reales pueden representarse mediante puntos sobre una recta. A cada número real le corresponde un único punto sobre la recta y a cada punto en la recta se le asocia un único número real.

Por ejemplo,



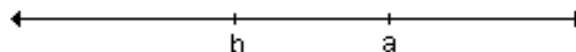
El conjunto de los reales cubre o completa la recta sin dejar “huecos” (axioma de completitud).

Los números reales están ordenados. Dados dos números reales a y b puede ser que a sea menor que b , a sea mayor que b o a sea igual a b .

Puede observarse en la recta que $a < b$ si el punto que representa al número a está a la izquierda del punto que representa al número b .



Análogamente, $a > b$ si el punto que representa al número a se halla a la derecha del que representa a b .



Si los números son iguales entre sí ($a = b$), corresponden al mismo punto en la recta numérica.



La relación de orden queda establecida teniendo en cuenta que el punto **a** precede al punto **b** si el número real **a** es menor que el número real **b** ($a < b$).

Intervalos

Un subconjunto de la recta real se llama intervalo, y contiene a todos los números reales que están comprendidos entre dos cualesquiera de sus elementos.

Geométricamente los intervalos corresponden a segmentos de recta, semirrectas o la misma recta real.

Los intervalos de números correspondientes a segmentos de recta son intervalos finitos, los intervalos correspondientes a semirrectas y a la recta real son intervalos infinitos.

Los intervalos finitos pueden ser cerrados, abiertos o semiabiertos.

Sean a y b dos números reales tales que $a < b$, tenemos que:

Nombre del intervalo	Notación conjuntista	Notación de intervalos	Representación gráfica
Abierto	$\{x / a < x < b\}$	(a, b)	
Semicerrado a derecha	$\{x / a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
Semicerrado a izquierda	$\{x / a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
Cerrado	$\{x / a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
Infinito abierto a izquierda	$\{x / x > a\}$	(a, ∞)	
Infinito cerrado a izquierda	$\{x / x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
Infinito abierto a derecha	$\{x / x < b\}$	$(-\infty, b)$	
Infinito cerrado a derecha	$\{x / x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
Infinito	$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	

Ejemplo. Interprete gráficamente los intervalos:

- a)** $[-2, 3]$ **b)** $(1, 4)$ **c)** $(0, 5]$ **d)** $[1, \infty)$ **e)** $(-\infty, 3)$

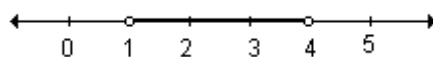
a) El intervalo $[-2, 3]$ comprende todos los números reales entre -2 y 3 . Como es cerrado incluye los extremos.

Su representación gráfica es:



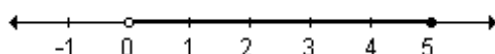
b) El intervalo $(1, 4)$ corresponde a todos los números reales entre 1 y 4 . Es abierto pues no incluye a los extremos.

Gráficamente:



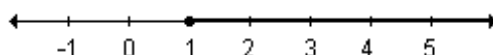
c) El intervalo $(0, 5]$ comprende todos los números reales entre 0 y 5 incluyendo el extremo 5 . Se trata de un intervalo semiabierto a izquierda o bien semicerrado a derecha.

Su gráfica es:



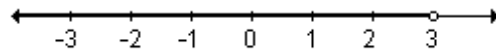
d) El intervalo $[1, \infty)$ es infinito y comprende todos los números reales mayores o iguales a 1 .

Gráficamente:



e) El intervalo $(-\infty, 3)$ es infinito y comprende todos los números reales menores que 3.

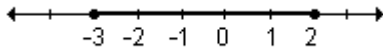
Su gráfica es:



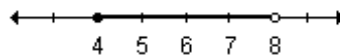
ACTIVIDADES SECCIÓN 1.3

1) Escriba como intervalo el conjunto definido sobre la recta real.

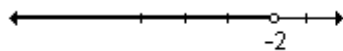
a)



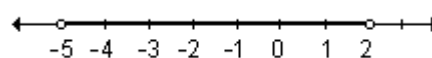
b)



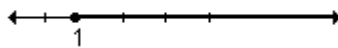
c)



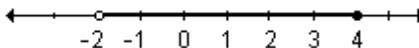
d)



e)



f)



2) Escriba, si es posible, como intervalo o unión de intervalos los siguientes conjuntos de números reales:

a) $A = \{x / 5 < x < 9\}$

b) $B = \{x / -1 \leq x \leq 3\}$

c) $C = \{x / x < -2 \vee x > 2\}$

d) $D = \{x / -4 < x < 2 \wedge x \neq -1\}$

3) Escriba en notación conjuntista los siguientes intervalos de números reales:

a) $(\frac{5}{4}, 3)$

b) $(-\infty, -1]$

c) $(-7, -2]$

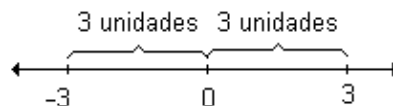
d) $(\frac{4}{3}, \infty)$

e) $[-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$

f) $[4, 9]$

1.4 Valor absoluto

En la siguiente gráfica, los números -3 y 3 representan las coordenadas de dos puntos distintos en la recta numérica. Sin embargo, ambos están situados a la misma distancia del 0.

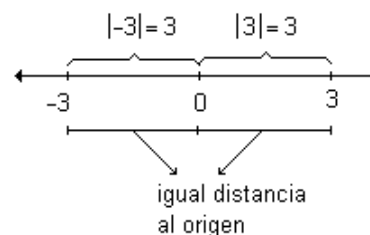


El punto correspondiente a -3 está situado a la izquierda del 0 a la misma distancia que el punto correspondiente a 3 que se encuentra situado a la derecha.

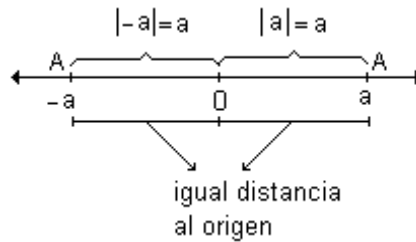
Esto se indica con la notación valor absoluto:

$|-3| = 3$ valor absoluto de -3 es 3.

$|3| = 3$ valor absoluto de 3 es 3.



Si a es un número real entonces a es la coordenada o abscisa del punto A sobre la recta real o numérica. El símbolo $|a|$ indica el número de unidades entre el punto A y el origen. El número $|a|$, no negativo, se llama valor absoluto de a .



Para un número positivo a resulta que su valor absoluto coincide con él mientras que si el número es negativo su valor absoluto es el opuesto de a . Además, como 0 es el origen es evidente que $|0| = 0$.

Desde el punto de vista geométrico el valor absoluto de un número es la distancia entre el punto que le corresponde sobre la recta real y el origen.

Desde el punto de vista algebraico, se define el valor absoluto de un número de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

Para los números reales a y b cualesquiera se cumple:

- $|a| \geq 0$ El valor absoluto de todo número real es un número no negativo.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
- $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, si $b \neq 0$ El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos siempre que el denominador sea no nulo.
- $|a| = |-a|$ Un número y su opuesto tienen el mismo valor absoluto.
- $|a| \leq b$ si y sólo si $-b \leq a \leq b$
- $|a| \geq b$ si y sólo si $a \geq b$ o $a \leq -b$

Ejemplos. a) $|-5| = 5 \geq 0$ b) $|-7| = |7| = 7$ c) $|-5 \cdot 7| = |-5| \cdot |7|$ d) $\left| \frac{15}{-5} \right| = \frac{|15|}{|-5|}$
 e) Si $|m| \leq 2$ entonces $-2 \leq m \leq 2$. f) Si $|p| > 3$ entonces $p > 3$ o $p < -3$.

Ejemplo. Halle $|x - 4|$ si a) $x > 4$ b) $x = 4$ c) $x < 4$

a) Si $x > 4$ entonces $x - 4 > 0$, es decir, $x - 4$ es positivo. De la definición de valor absoluto se concluye que $|x - 4| = x - 4$.

b) Si $x = 4$ entonces $x - 4 = 0$. Por lo tanto: $|x - 4| = |0| = 0$.

c) Si $x < 4$ entonces $x - 4 < 0$, es decir, $x - 4$ es negativo. De la definición de valor absoluto se concluye que $|x - 4| = -(x - 4) = -x + 4 = 4 - x$.

Distancia entre dos puntos

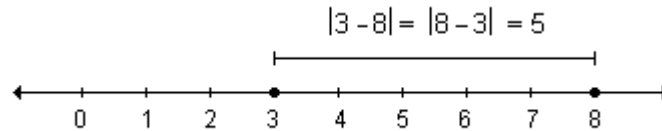
El concepto de valor absoluto permite definir la distancia entre dos puntos cualesquiera de la recta real.

Ejemplo. La distancia entre los puntos de abscisas 3 y 8, es 5.

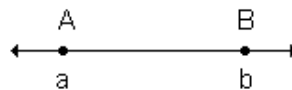
Esta distancia se obtiene al restar las coordenadas de los puntos: $8 - 3 = 5$.

Utilizando valor absoluto se escribe $|8 - 3| = 5$.

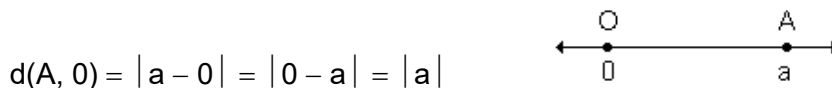
Como $|3 - 8|$ también es 5, se concluye que no importa el orden en el que se realice la resta.



Definición. Sean a y b las coordenadas o abscisas de los puntos A y B sobre la recta real. La distancia entre ellos está dada por $d(A, B) = |a - b| = |b - a|$



Se puede observar que la distancia entre el origen O y el punto A está dada por:



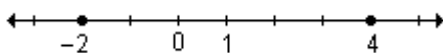
ACTIVIDADES SECCIÓN 1.4

1) Calcule:

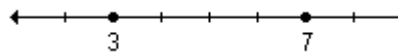
- a) $|3 \cdot (-2)|$ b) $5 - |-5|$ c) $\frac{-6}{|-6|}$ d) $7 + |-7|$

2) Exprese la distancia entre los números dados utilizando notación de valor absoluto.

a)



b)



c) $-8,5$ y $15,6$

d) $-\frac{11}{4}$ y $-\frac{5}{6}$

3) Escriba cada expresión sin utilizar valor absoluto.

- a) $|a - 3|$ si $a > 3$ b) $|4 - b|$ si $b = 4$ c) $|m - n|$ si $m < n$

RESPUESTAS CAPÍTULO 1

RESPUESTAS SECCIÓN 1.1 - 1.2

- 1) -9 entero, racional, real; $0,15$ racional, real; $\sqrt{7}$ irracional, real
 π irracional, real; $2,3444\dots$ racional, real; $\frac{16}{9}$ racional, real
- 2) a) $-\frac{7}{8}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $-\frac{5}{16}$ d) $-\frac{8}{9}$

3)a) $\sqrt{(-4)^2} > -4$ b) $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$ c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = 9$
d) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} > \sqrt{5}$ e) $\frac{1}{\sqrt{5}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$ f) $\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$
g) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} > \sqrt{3}$ h) $6^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{1}{2}} < 6^{\frac{1}{4}}$ i) $(27)^{-\frac{4}{3}} = 3^{-4}$
4)a) $\left(-\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$ b) $7^0 = 1$ o bien, $1^6 = 1$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$
5)a) $\frac{1}{25} = 5^{-2}$ b) $-\frac{1}{8} = (-2)^{-3}$ c) $[(2)^{-1}]^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^7$ d) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3 : \left(-\frac{2}{3}\right)\right]^{-4} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-8}$
6)a) b^6 b) $\left(\frac{1}{a}\right)^3$ c) $-\frac{1}{a}$ d) $\left(\frac{a}{b}\right)^5$ e) $\frac{1}{a}$ f) $\frac{a}{b}$ g) $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ h) a^4

7) El primer error se debe a que no separó la expresión en términos para operar en el orden correcto y aplicó indebidamente la propiedad asociativa, agrupando fracciones que no debían sumarse. Esto modificó la estructura original de la operación combinada.

Luego, en el último paso, tampoco realizó correctamente la división de fracciones: en lugar de multiplicar por el inverso, multiplicó numeradores y denominadores entre sí, lo que llevó a un resultado incorrecto.

8)a) $\sqrt{\frac{25}{16}} - 1 \neq \sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{1}$ Por un lado, $\sqrt{\frac{25}{16}} - 1 = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ mientras que $\sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{1} = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$

b) $\sqrt{-\frac{81}{25}} = -\frac{9}{5}$ c) $\sqrt{\frac{1}{9} \cdot \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{\frac{25}{4}}$

d) $\sqrt{\frac{25}{81} \cdot \frac{16}{9}} \neq \sqrt{\frac{25}{81}} \cdot \sqrt{\frac{16}{9}}$ Se tiene que $\sqrt{\frac{25}{81} \cdot \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{5}{12}$, mientras que $\sqrt{\frac{25}{81}} \cdot \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{27}$

e) $\sqrt{\frac{9}{16}} + \sqrt{1} \neq \sqrt{\frac{9}{16} + 1}$ $\sqrt{\frac{9}{16}} + \sqrt{1} = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$ mientras que $\sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$

f) $\sqrt[3]{\frac{1}{32}} \neq \sqrt[5]{\frac{1}{32}}$ Se tiene que $\sqrt[3]{\frac{1}{32}} = \sqrt[2 \cdot 3]{\frac{1}{32}} = \sqrt[6]{\frac{1}{32}}$ lo cual es diferente a $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

9) A cargo del estudiante.

10) Contiene menos agua el primero y más agua el segundo.

11)a) 3 b) 0

c) El logaritmo no está definido porque 2 elevado a cualquier número real siempre es positivo, y por eso el argumento no puede ser negativo.

d) 2 e) 4 f) -0.496

g) No se puede porque la base del logaritmo no puede ser negativa.

h) -1

12) Es cierto porque por propiedad, cualquier logaritmo cuyo argumento es 1 siempre vale 0, sin importar la base.

13)a) 3 b) 5 c) $3e^2$ d) 2 e) -3 f) $5e$

14)a) $2^3 = 8$ b) $3^{-4} = \frac{1}{81}$ c) $25^{\frac{1}{2}} = 5$ d) $10^{-2} = \frac{1}{100}$ e) $e^{1,3863} = 4$

15)a) $\log_2 32 = 5$ b) $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$ d) $\log_4 8 = \frac{3}{2}$ e) $\ln 7,3891 = 2$

16)a) $\log_4 x + \log_4 z$ b) $\log y - \log x$ c) $\frac{1}{3} \log_2 z$
d) $5 \log_a y + 2 \log_a w - 4 \log_a x - 3 \log_a z$ e) $\frac{7}{4} \ln x - \frac{5}{4} \ln y - \frac{1}{4} \ln z$
f) $\frac{1}{3} \log z - \log x - \frac{1}{2} \log y$

17) a) $\ln 6x$ b) $\log \frac{x}{5}$ c) $\log_3 x^2 m$ d) $\log_5 25x$ e) $\log_2 \frac{\sqrt[3]{x^2} r}{y}$ f) $\log_2 \frac{\sqrt{y}}{zx}$

18) La intensidad será 64,9 decibeles

19) $\beta = 120 + 10 \log I$

Para una intensidad de 10^{-6} watts por metro cuadrado corresponde un sonido de 60 decibeles.

20)a) 1 b) 2 c) 3

d) Cuando disminuye la concentración de iones de hidrógeno $[H^+]$ el pH aumenta.

e) $3,16 \cdot 10^{-4}$ moles por litro f) $3,98 \cdot 10^{-8}$ moles por litro.

21)	Redondeo	Truncamiento
$\sqrt{11}$	3,32	3,31
$\frac{17}{90}$	0,19	0,18

22)a) El valor del perímetro es $3\sqrt{17}$ cm

b) Un valor aproximado del perímetro, a los centésimos, por redondeo es 12,37 cm y por truncamiento 12,36 cm.

23)a) La medida del lado del cuadrado es $\sqrt{35}$ cm

b) Un valor aproximado de la medida del lado del cuadrado, a los centésimos, por redondeo es 5,92 cm y por truncamiento 5,91 cm.

24)a) La medida del radio del cantero es $r = \frac{500}{\pi}$ cm

b) Un valor aproximado de la medida del radio del cantero, a los centésimos, por redondeo y por truncamiento es 159,15 cm.

25)a) $7,89 \cdot 10^9$ b) $3,4 \cdot 10^{-6}$ c) $5,739 \cdot 10^6$ d) $4,56 \cdot 10^{-10}$ e) $1,35 \cdot 10^{12}$ f) $7,9 \cdot 10^{-9}$

26) La superficie de los glóbulos rojos, por redondeo a los centésimos: $3,85 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$ y por truncamiento a los centésimos: $3,84 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$.

27) $12\,930\,000 = 1,293 \cdot 10^7$; $880\,000 = 8,8 \cdot 10^5$

28)a) $1 \cdot 10^{10}$ b) $7 \cdot 10^{-2}$ c) $3,5 \cdot 10^{-2}$ d) $7,84 \cdot 10^6$

29) Se necesitan $4,5 \cdot 10^{28}$ protones.

30) La masa corresponde a 2,4 g, 2,36 g y 2,356 g redondeada a la décima, centésima y milésima respectivamente.

31) La capacidad del tanque es de $18,3 \text{ m}^3$, $18,29 \text{ m}^3$ y $18,294 \text{ m}^3$ redondeada a la décima, centésima y milésima respectivamente.

32) El ayudante recibe \$ 60 000.

33) El largo del río es de 3 600 000 cm, lo que equivale a 36 km.

- 34)** La densidad poblacional es $\frac{352\,400}{2\,500} = 140,96$. Esto significa que por cada km^2 residen aproximadamente 141 habitantes.
- 35)** El volumen del cubo aumentará en un 33,1 %
- 36)** El porcentaje de humedad de la entrega es 13,33 %.
- 37)a)** La superficie es 2,208 millones de hectáreas. **b)** El porcentaje aproximado es 6,3 %.
- 38)** El endosperma puede variar entre 160 mg. y 164 mg.
- 39)** Menos de 200 hectáreas el 62,5 % de los productores; entre 200 y 1 000 hectáreas el 30 % y más de 1 000 hectáreas, el 7,5 %.
- 40)** 312 productores sembraron a 20 cm, 90 a 21 cm, 126 a 17,5 cm y 72 a 15 cm.
- 41)** El precio de cada cuota es: primera cuota \$ 728 000, segunda cuota \$ 364 000, tercera cuota \$ 182 000 y cuarta cuota \$ 91 000.
- 42)** No es el mismo resultado debido a que se calculan porcentajes sobre cantidades diferentes. Es decir, si se perdió primero el 20 % de la cosecha, el aumento del 45% es sobre una cantidad menor que si primero aumenta un 45 % la cosecha y luego se pierde el 20 %.
- 43)** Actualmente, el costo de la bolsa de trigo es de \$ 13 104.

RESPUESTAS SECCIÓN 1.3

- 1)a)** $[-3, 2]$ **b)** $[4, 8]$ **c)** $(-\infty, -2)$ **d)** $(-5, 2)$ **e)** $[1, \infty)$ **f)** $(-2, 4]$
- 2)a)** $(5, 9)$ **b)** $[-1, 3]$ **c)** $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ **d)** $(-4, -1) \cup (-1, 2)$
- 3)a)** $\{x / \frac{5}{4} < x < 3\}$ **b)** $\{x / x \leq -1\}$ **c)** $\{x / -7 < x \leq -2\}$
- d)** $\{x / x > \frac{4}{3}\}$ **e)** $\{x / -\frac{5}{2} \leq x < \frac{1}{2}\}$ **f)** $\{x / 4 \leq x \leq 9\}$

RESPUESTAS SECCIÓN 1.4

- 1)a)** 6 **b)** 0 **c)** -1 **d)** 14
- 2)a)** $|4 - (-2)| = |6| = 6$ o $|-2 - 4| = |-6| = 6$
- b)** $|7 - 3| = |4| = 4$ o $|3 - 7| = |-4| = 4$
- c)** $|15,6 - (-8,5)| = |15,6 + 8,5| = 24,1$ o $|-8,5 - 15,6| = |-24,1| = 24,1$
- d)** $|\frac{11}{4} - (-\frac{5}{6})| = |-\frac{5}{6} - (-\frac{11}{4})| = \frac{23}{12}$
- 3)a)** Si $a > 3$, entonces $a - 3$ es positivo. Luego, de la definición de valor absoluto se concluye que $|a - 3| = a - 3$.
- b)** Si $b = 4$, resulta $|4 - b| = |0| = 0$.
- c)** Si $m < n$, entonces $m - n$ es negativo y $|m - n| = -(m - n) = n - m$.

2. Expresiones algebraicas

En numerosas situaciones resulta necesario traducir del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico, utilizando números y letras.

En álgebra se usan letras como a , b , c , x , y para representar números, que pueden ser variables o constantes.

Una **variable** es una letra que se utiliza para representar cualquier elemento de un conjunto. Dependiendo del contexto o significado de las variables, se restringen los valores que las mismas pueden tomar.

Por ejemplo, si la variable x denota número de personas que asisten a un evento, entonces x debe ser un número natural.

El conjunto de todos los números reales que puede tomar una variable se lo conoce como dominio de la variable.

En contraste con una variable, una **constante** representa un número fijo, como 12 o $\sqrt{2}$, o una letra que representa un número fijo.

Combinando constantes y variables mediante el uso de las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y potenciación de exponente racional, se obtienen expresiones algebraicas.

Algunos ejemplos de expresiones algebraicas son:

$$2x - 5zy, \quad 2x^2 - y + \frac{4}{xb}, \quad x^{-3} + 8yz, \quad \frac{a+1}{x^2-4} \quad \text{donde } a \text{ y } b \text{ son constantes y } x, y, z \text{ son variables.}$$

Las expresiones algebraicas tienen una gran aplicación en diferentes áreas del conocimiento, ya que permiten escribir matemáticamente situaciones de la vida cotidiana y de las ciencias.

Ejemplo. Un ciclista se desplaza a una velocidad que es el doble de la velocidad de un corredor. Escriba la velocidad del ciclista en función de la velocidad del corredor.

Solución.

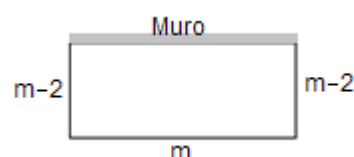
Se asigna una variable al valor desconocido, en este caso:

velocidad del corredor: x

Como la velocidad del ciclista es el doble de la velocidad del corredor:

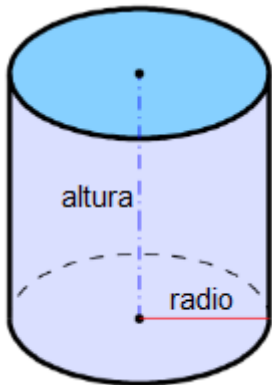
velocidad del ciclista: $2x$

Ejemplo. Un voluntario desea sembrar un jardín escolar de forma rectangular utilizando un lado de la Escuela Rural como muro y colocando una cerca de alambre en los tres lados restantes. Escriba una expresión que permita determinar la longitud de alambre que necesita en función de la medida del muro y sabiendo que el otro lado del jardín medirá dos metros menos.



Solución. Si llamamos m a la medida del muro sobre el que se construirá el jardín, la medida del otro lado será $m - 2$. Luego, la longitud de alambre que se necesita está dada por $m - 2 + m + m - 2$, que se puede simplificar $3m - 4$.

Ejemplo. La altura de un cilindro es igual al doble del radio de su base. Determine la expresión algebraica que permite determinar el volumen del cilindro para cualquier radio r . Calcule el volumen para un cilindro cuya altura es de 6 cm. Escriba el valor exacto y una aproximación a la centésima.



Solución. El volumen de un cilindro se calcula multiplicando el área de su base por su altura. Si llamamos a a la altura del cilindro y r al radio, podemos escribir simbólicamente $V = \pi r^2 a$.

Como la altura es el doble de su radio, resulta $a = 2r$.

Sustituyendo en la expresión del volumen se obtiene:

$$V = \pi r^2 a \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot 2r \Rightarrow V = 2\pi r^3$$

Si la altura es 6 cm, el radio es r mide 3 cm. Reemplazando en la expresión del volumen resulta:

$$V = 2\pi r^3 \Rightarrow V = 2\pi 3^3 \Rightarrow V = 54\pi$$

Escribiendo la respuesta en forma exacta, el volumen del cilindro es $54\pi \text{ cm}^3$. Una medida aproximada puede obtenerse al usar la tecla π de la calculadora. Aproximando a la centésima, el valor aproximado del volumen es $169,65 \text{ cm}^3$.

Ejemplo.

Sean las siguientes expresiones dadas en lenguaje simbólico. Escríbalas en lenguaje coloquial sabiendo que x representa un número.

- a) $2x + 3$ b) $\frac{1}{3}x - 7$ c) $2(x+1)$

Solución.

a) $2x$ representa el doble del número y el signo $+$ significa un aumento. Entonces, la expresión $2x + 3$ indica el doble de un número aumentado en tres unidades.

b) $\frac{1}{3}x$ representa la tercera parte del número y el signo $-$ indica una disminución. Por lo tanto, la expresión $\frac{1}{3}x - 7$ se interpreta como la tercera parte de un número disminuida en siete unidades.

c) $(x+1)$ simboliza el sucesor o consecutivo de un número y al multiplicar por 2 nos indica el doble. Entonces, $2(x+1)$ representa el doble del consecutivo de un número.

2.1 Polinomios

Una expresión algebraica que contenga únicamente potencias enteras no negativas de una o más variables y que no tenga ninguna variable en el denominador recibe el nombre de polinomio.

Los polinomios más simples son los de una variable.

Definición. Un polinomio de variable x es una expresión de la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, donde n es un entero no negativo y $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ son números reales, con $a_n \neq 0$.

El número entero no negativo n es el **grado del polinomio** pues es el mayor exponente al que está elevada la variable. Las expresiones $a_k x^k$ se llaman términos del polinomio. Los números $a_n, a_{n-1}, \dots$,

a_1, a_0 son los coeficientes del polinomio, donde a_n se denomina **coeficiente principal** pues es el que acompaña a la variable con el mayor exponente y a_0 es el **término independiente**.

También se escribe $p(x)$ para indicar el polinomio p en la variable x .

Cuando en el polinomio se encuentran todas las potencias desde el grado del polinomio hasta el término independiente, se dice que el polinomio está completo. En caso de no estarlo, se dice incompleto. Si queremos completarlo se le agrega el o los términos que faltan con coeficiente nulo.

Si además de estar completo, las potencias se encuentran de mayor a menor se dice que está ordenado en forma decreciente y, en caso contrario, en forma creciente.

Ejemplo. $q(x) = -3x^2 + x^4 - 7$ es un polinomio de grado 4 (es el mayor exponente al que aparece elevada la variable). Su coeficiente principal es 1 y su término independiente es -7 .

El polinomio no está completo ni ordenado. Para completarlo le agregamos las potencias que faltan, es decir, x^3 y x con coeficiente 0. Ordenando además las potencias en forma decreciente resulta:

$$q(x) = x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x - 7$$

Según la cantidad de términos los polinomios reciben distintos nombres, por ejemplo:

- *Monomios.* Son aquellos que tienen un sólo término. Por ejemplo, $a(x) = 5x^3$
- *Binomios.* Son aquellos que tienen dos términos. Por ejemplo, $b(x) = x^2 - 3x$
- *Trinomios.* Son los que tienen tres términos. Por ejemplo, $c(x) = 2x - 4x^2 + 7$
- *Cuadrinomios.* Son aquellos que tienen cuatro términos. Por ejemplo, $d(x) = 2x - 3x^4 + 7x^3 + 1$

Cuando tienen más de cuatro términos, se los llama, en general, polinomios. El prefijo poli significa muchos y nomios términos.

Valor numérico de un polinomio

El valor numérico de un polinomio se obtiene cuando se sustituye la variable x por un número. Al reemplazar la variable x por un número a en el polinomio $p(x)$ se anota $p(a)$.

Ejemplo. Halle el valor numérico del polinomio $p(x) = -x^2 + 3x - 2$ en $x = -1$ y $x = 1$.

Solución.

Se sustituye x por cada valor y resulta:

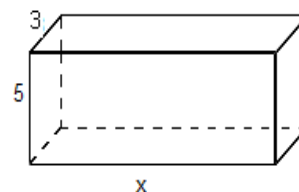
$$p(-1) = -(-1)^2 + 3(-1) - 2 = -1 - 3 - 2 = -6. \text{ El valor numérico de } p(x) \text{ en } -1 \text{ es } -6.$$

$$p(1) = -1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = -1 + 3 - 2 = 0. \text{ El valor numérico de } p(x) \text{ en } 1 \text{ es } 0.$$

Se llama **cero** de un polinomio al valor de la variable para el cual el valor numérico del polinomio es cero. En el ejemplo anterior, 1 es cero de $p(x)$ pues el valor numérico del polinomio p en 1 es cero.

Ejemplo. En geometría se utilizan polinomios para representar distintas situaciones.

Solución. Teniendo en cuenta que las caras del prisma rectangular de la figura son dos rectángulos de medidas x y 3 , dos rectángulos de medidas 5 y 3 y dos rectángulos de medidas x y 5 , su área total (la suma del área de todas las caras) se puede expresar de la siguiente manera:



$$a(x) = 5x + 5x + 3x + 3x + 15 + 15$$

Al simplificar se obtiene el polinomio $a(x) = 16x + 30$, que representa el área total del cuerpo.

Al calcular el valor numérico del polinomio para distintos valores de x , se puede determinar el área total de cualquier prisma rectangular para el cual dos de sus medidas son 5 y 3 . Por ejemplo, si $x = 8$ resulta:

$a(8) = 16 \cdot 8 + 30 = 158$. Luego, el área total será 158 unidades de superficie.

2.2 Operaciones

Suma y resta de polinomios

Aquellos términos de un polinomio que tienen la misma parte literal (la misma variable con igual exponente) se llaman términos semejantes.

Para sumar o restar polinomios se deben agrupar los términos semejantes. Luego, se suman o se restan los coeficientes de esos términos. Son válidas las mismas propiedades que para la suma y resta de números reales.

Ejemplo. Resuelva e indique el resultado como un polinomio completo y ordenado en forma creciente:

a) $(3x - 6) + (7x^2 - 2x + 6) - (1 + 2x^2 - 4x)$

b) $(1 - 2x) - (x^3 + 3x - 4) + (5x + x^3 - 5)$

Solución.

a) Se quitan los paréntesis y se opera con los coeficientes de los términos semejantes:

$$\begin{aligned} (3x - 6) + (7x^2 - 2x + 6) - (1 + 2x^2 - 4x) &= 3x - 6 + 7x^2 - 2x + 6 - 1 - 2x^2 + 4x = \\ &= (-6 + 6 - 1) + (3x - 2x + 4x) + (7x^2 - 2x^2) = -1 + 5x + 5x^2 \end{aligned}$$

b) Quitando los paréntesis, operando con los términos semejantes resulta:

$$\begin{aligned} (1 - 2x + 0,5x^2) - (x^3 + 3x - 4) + (5x + x^3 - 5) &= 1 - 2x + 0,5x^2 - x^3 - 3x - 0,5x^2 + 4 + 5x + x^3 - 5 = \\ &= (1 + 4 - 5) + (-2x - 3x + 5x) + (0,5x^2 - 0,5x^2) + (-x^3 + x^3) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \end{aligned}$$

Nota. El polinomio cuyos coeficientes son todos iguales a cero, como el resultante en este ejemplo, se denomina polinomio nulo.

Multiplicación de polinomios

Para realizar el producto de polinomios se utiliza la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma y resta.

Ejemplo. Calcule **a)** $2x.(x^2 - 5)$

b) $(2x + 1).(4 - x^2)$

Solución.

Aplicando propiedad distributiva se obtiene:

a) $2x.(x^2 - 5) = 2x.x^2 - 2x.5 = 2x^3 - 10x$

b) $(2x + 1).(4x - x^2) = 2x.4x - 2x.x^2 + 1.4x - 1.x^2 = 8x^2 - 2x^3 + 4x - x^2 = -2x^3 + 7x^2 + 4x$

Ejemplo. Una empresa produce y vende x artículos y calcula el precio de venta y el costo de producción unitarios de un determinado artículo mediante $p(x) = 17 - 0,5x$ y $q(x) = 8 + 1,2x$, respectivamente. Escriba una expresión que permita calcular:

- a)** el ingreso obtenido por la venta de x artículos.
- b)** el costo de producir x artículos.
- c)** la ganancia obtenida por la venta de x artículos.

Solución.

a) Para calcular el ingreso total $i(x)$ o sea, el ingreso obtenido por la venta de x artículos, se multiplica el precio unitario $p(x)$ por la cantidad de artículos vendidos, x .

Es decir: $i(x) = p(x) \cdot x$

Se reemplaza $p(x)$ por su expresión correspondiente: $i(x) = (17 - 0,5x) \cdot x$

Aplicando propiedad distributiva se obtiene: $i(x) = 17x - 0,5x^2$ que es la expresión que permite calcular el ingreso obtenido por la venta de x artículos.

b) Para calcular el costo total $c(x)$ o sea, el costo obtenido por la producción de x artículos, se debe multiplicar el precio unitario $q(x)$ por la cantidad de artículos producidos, x .

Es decir, $c(x) = q(x) \cdot x$

Se reemplaza $q(x)$ por su expresión correspondiente: $c(x) = (8 + 1,2x) \cdot x$

Se aplica propiedad distributiva y se obtiene: $c(x) = 8x + 1,2x^2$ que es la expresión que permite calcular el costo de producir x artículos.

c) La ganancia $g(x)$ obtenida por la venta de x artículos resulta de la diferencia entre el ingreso $i(x)$ y el costo $c(x)$. Es decir: $g(x) = i(x) - c(x)$

Se reemplaza el costo y el ingreso por sus respectivas expresiones y se obtiene:

$$g(x) = (17x - 0,5x^2) - (8x + 1,2x^2)$$

Al eliminar los paréntesis y resolver resulta:

$$g(x) = 17x - 0,5x^2 - 8x - 1,2x^2 \Rightarrow g(x) = -1,7x^2 + 9x \text{ es la expresión que permite calcular la ganancia obtenida por la venta de } x \text{ artículos.}$$

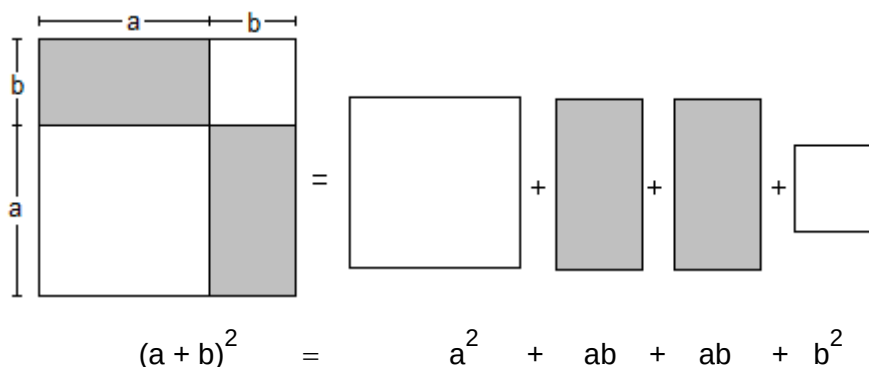
Cuadrado de un binomio

Se considera el producto $(a + b) \cdot (a + b)$ que se puede escribir como $(a + b)^2$.

Aplicando propiedad distributiva para resolver el producto, se observa que: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Se puede demostrar geométicamente considerando un cuadrado cuyo lado mide $a + b$, siendo a y b números positivos. Resulta que $(a + b)^2$ es el área del cuadrado.

Si se analiza la figura, se observa que el área se puede descomponer en el área de cuatro figuras. Entonces:



Resulta que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Esta propiedad se puede ampliar al cuadrado de una resta, lo que resulta que $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

El cuadrado de un binomio es el cuadrado del primer término, más (o menos) el doble producto de los dos términos, más el cuadrado del segundo término.

Producto de sumas y diferencias

Se puede utilizar la propiedad distributiva para multiplicar dos polinomios $(a + b)$ y $(a - b)$ y demostrar que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

División de polinomios

La división de polinomios requiere un proceso similar que la división aritmética. Teniendo dos polinomios $p(x)$ (dividendo) y $q(x)$ (divisor) de modo que $q(x) \neq 0$, siempre se obtienen dos polinomios $c(x)$ (cociente) y $r(x)$ (resto) que verifican:

$$p(x) = q(x) \times c(x) + r(x)$$

$$\text{dividendo} = \text{divisor} \times \text{cociente} + \text{resto}$$

El grado de $c(x)$ está determinado por la diferencia entre los grados de $p(x)$ y $q(x)$, mientras que el grado de $r(x)$ será, como máximo, un grado menor que $q(x)$.

Ejemplo. Para dividir un polinomio por un monomio, se aplica propiedad distributiva.

Para la división $(-6x^3 + x - 3x^2) : (-0,5x)$ resulta:

$$(-6x^3 + x - 3x^2) : (-0,5x) = (-6x^3) : (-0,5x) + x : (-0,5x) + (-3x^2) : (-0,5x) = 12x^2 - 2 + 6x$$

En cualquier división de polinomios se utiliza la propiedad de las potencias que indica $a^m : a^n = a^{m-n}$

Regla de Ruffini

Es un método muy simple y rápido para resolver la división de polinomios cuando el divisor es de la forma $(x - a)$, donde a es un número real.

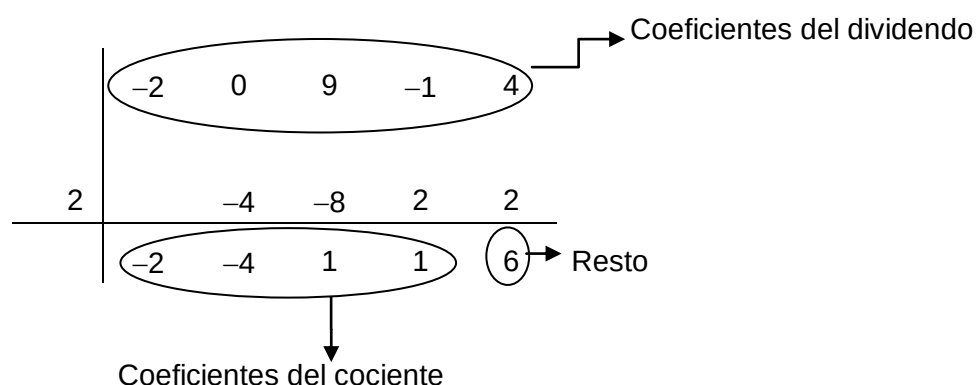
Ejemplo. Divida $p(x) = -2x^4 + 9x^2 + 4 - x$ por $q(x) = x - 2$.

En este caso $p(x)$ es el dividendo y $q(x)$ el divisor.

Para aplicar esta regla $p(x)$ debe estar completo y ordenado en forma decreciente, es decir:

$$p(x) = -2x^4 + 0x^3 + 9x^2 - x + 4$$

Se utiliza una disposición práctica:



De la última línea de la disposición práctica, se deduce que el cociente es $c(x) = -2x^3 - 4x^2 + x + 1$ (como el dividendo tiene grado 4 y el divisor grado 1, el grado del cociente $c(x)$ es la diferencia entre esos grados, es decir, 3), y el resto de la división es 6.

Como el resto de la división no es cero se dice que los polinomios no son divisibles.

Teorema del resto

Sea a un número real y $p(x)$ un polinomio de grado $n \geq 1$. El resto de la división de $p(x)$ por $(x - a)$ es el valor $p(a)$.

Ejemplo. Compruebe que se verifica el teorema del resto en el ejemplo anterior.

Solución.

Se plantea $p(2)$ y resulta:

$p(2) = -2 \cdot 2^4 + 9 \cdot 2^2 + 4 - 2 = -32 + 36 + 4 - 2 = 6$, que es el resto obtenido al hacer la división aplicando Ruffini.

ACTIVIDADES SECCIÓN 2.1 - 2.2

1)a) El largo de un rectángulo es cinco unidades más que su ancho. Expresa la longitud y el ancho en función de la misma variable.

b) El ancho de un rectángulo es la mitad de su longitud. Expresa la longitud y el ancho en función de la misma variable.

c) Una tabla de 20 metros se corta en dos trozos. Expresa la longitud del trozo más largo en función de la longitud del trozo más corto.

2) Escriba en lenguaje coloquial las siguientes expresiones expresadas simbólicamente, sabiendo que x representa un número:

a) $\frac{1}{2}x - (x + 1)$

b) $\frac{3}{4}x + 2x$

c) $2x - 1$

3) Dadas las siguientes expresiones algebraicas, identifique aquellas que sean polinomios. En caso que no lo sean, indique por qué.

a) $3x^2 - 5 + \frac{2}{x}$

b) $x^3 + 7x - 1$

c) $\sqrt{2}x^2 - x^4y + xy$

d) $x^{-2} + x - 5x^3$

e) $7x^{\frac{3}{2}} - x + 6$

f) $xy - 2x^3 + y^2$

4) Escriba un polinomio en la variable x , con coeficientes racionales, completo, de grado tres, cuyo coeficiente principal sea -2 y de término independiente $0,5$.

5) Resuelva las operaciones indicadas y escriba el polinomio resultado en forma ordenada y decreciente.

a) $(0,2x - x^2 - 0,1) + (0,2 - 0,5x^2 - x)$

b) $\left(-0,1x^3 - \frac{1}{2}x + 2 - x^2\right) - \left(-0,5x - 0,2x^3 + \frac{1}{2} + 0,1x^2\right)$

c) $(x^2 - 0,1x^3 - 1) \cdot (-0,2x^2)$

d) $2 \cdot (x^3 - 3x^2 - 1) + 0,2 \cdot (15x^2 - 2x + 10)$

e) $(2x - 1)^2$

f) $\left(\frac{1}{2}x^3 - 0,1x^2 + x\right) : (0,5x)$

g) $2x \cdot (x - 4x^2) - (8x^5 + 2x^2) : (-2x^2)$

h) $(2x + 1)^2 + (x - 1)^2 - (x + 2) \cdot (x - 2)$

6) Calcule el valor numérico de $p(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x - 3$ en $-1, 0, 2$ y 3 .

7) Sea $r(x) = x^2 - 6x + 5$, ¿ -3 es un cero?, ¿ 0 es un cero?, ¿ 5 es un cero?, ¿ 1 es un cero? ¿Por qué?

8) Si $p(x) = ax^2 + 2x + 12$, determine el valor de a sabiendo que 3 es un cero de $p(x)$.

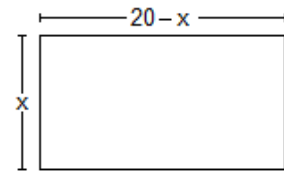
9) Aplique la regla de Ruffini para dividir y verifique el resto utilizando el teorema del resto:

a) $(-2x^3 + x^2 - 5 + x) : (x - 1)$

b) $(0,5x^4 - x + x^2 + 1) : (x + 1)$

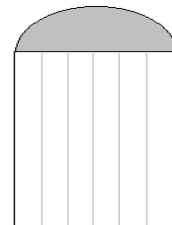
c) $(x^3 - 8) : (x - 2)$

10) Con un alambre de 40 cm se forma un rectángulo. Halle la expresión algebraica que define el área del rectángulo y calcule su valor para $x = 4$.



11) En un cuadrado de lado x se aumenta la base en 3 unidades y se reduce la altura a la tercera parte. Halle el área del rectángulo resultante.

12) Un silo de granos está formado por una sección principal cilíndrica y un techo semiesférico. Escriba una expresión que permita determinar el volumen total del silo si la parte cilíndrica tiene 5,5 m más de alto que el radio del silo.



13) El ingreso semanal total obtenido con la venta de x máquinas es $(-0,03x^2 + 1000x)$ pesos mientras que el costo total para la fabricación de x máquinas es $(0,000001x^3 - 0,01x^2 + 500x + 60000)$ pesos, donde $0 \leq x \leq 25000$. Escriba una expresión que dé la utilidad semanal total de la empresa.

14) Se desea construir un depósito de agua con forma cilíndrica, siendo el área de la base la quinta parte del cubo de la altura.

a) Exprese el volumen del depósito.

b) ¿Cuántos metros cúbicos de agua caben si la altura es de tres metros?

15) La figura de la derecha muestra un cartón rectangular con las esquinas recortadas. Los lados se pliegan para formar una caja. En términos de x exprese:

a) el largo de la caja.

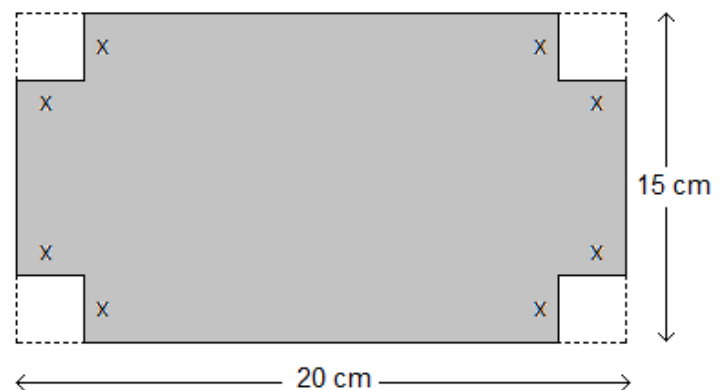
b) el ancho de la caja.

c) el alto de la caja.

d) el área de cartón utilizado para construir la caja.

e) el volumen de la caja.

f) Si $x = 3$, halle cada uno de los valores anteriores.



2.3 Factorización de polinomios

¿Qué significa factorizar? Factorizar un polinomio significa expresar al polinomio como el producto de términos más simples.

Ejemplo. Aplicando la recíproca de la propiedad distributiva, se puede escribir $3x^3 + x = x \cdot (3x^2 + 1)$

El segundo miembro de la igualdad anterior corresponde a la factorización del binomio del primer miembro. Se dice que x y $3x^2 + 1$ son factores de $3x^3 + x$.

¿Cómo se factoriza un polinomio? Hay varias maneras básicas de factorizar un polinomio, que se usan según las características del mismo. Cada una de estas formas de factorizar tiene un nombre particular. Algunas son: factor común, trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, factorización por Ruffini.

Factor Común

El caso más sencillo de factorización se presenta cuando los términos tienen un factor común. Para aplicarlo se busca una expresión común a todos los términos del polinomio.

Ejemplo. Determine el factor común de cada polinomio.

a) 2 es el factor común de $16x^3 + 8x^2 - 2x + 4$ porque:

$$16x^3 + 8x^2 - 2x + 4 = 2 \cdot 8x^3 + 2 \cdot 4x^2 - 2 \cdot 1x + 2 \cdot 2 = 2 \cdot (8x^3 + 4x^2 - x + 2)$$

b) $3x^4$ es el factor común de $18x^4 + 15x^5 - 12x^6$ porque:

$$18x^4 + 15x^5 - 12x^6 = 3x^4 \cdot 6 + 3x^4 \cdot 5x - 3x^4 \cdot 4x^2 = 3x^4 \cdot (6 + 5x - 4x^2)$$

Trinomio Cuadrado Perfecto

La expresión $a^2 + 2ab + b^2$ se conoce como trinomio cuadrado perfecto porque sus términos corresponden al cuadrado de a , el doble producto de a y b , y el cuadrado de b . Un trinomio cuadrado perfecto se produce cuando se multiplica un binomio por sí mismo, es decir cuando se eleva al cuadrado un binomio. Resulta, entonces $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

Ejemplo. Se presentan dos trinomios cuadrados perfectos:

$$x^2 + 14x + 49 \quad \text{que es el cuadrado de } (x + 7)$$

$$y^2 - 6y + 9 \quad \text{que es el cuadrado de } (y - 3)$$

Ejemplo. Factorice el polinomio $9x^2 + 30x + 25$.

Solución.

La aplicación de este caso requiere que el polinomio tenga tres términos pero no cualquier polinomio de tres términos es un trinomio cuadrado perfecto, por eso se debe verificar.

$$\begin{array}{ccc}
 & \swarrow & \searrow \\
 9x^2 & + & 30x & + & 25 \\
 \swarrow & & & & \searrow \\
 \text{Este término es el cuadrado de } 3x \text{ ya que} & & \text{Este término es el cuadrado de } 5 \\
 (3x)^2 = 9x^2 & & \text{ya que } 5^2 = 25
 \end{array}$$

Como $2 \cdot 3x \cdot 5 = 30x$, se puede asegurar que el polinomio es un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza como un binomio al cuadrado.

$$\text{Resulta entonces } 9x^2 + 30x + 25 = (3x + 5)^2$$

Diferencia de Cuadrados

La expresión $a^2 - b^2$ es una diferencia de cuadrados debido a que sus dos términos son los cuadrados de a y de b .

Una diferencia de cuadrados surge cuando se multiplican dos binomios de la forma $(a + b) \cdot (a - b)$.

Resulta entonces $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

Ejemplo.

$$\begin{array}{ccc}
 & 9x^2 & - & 4 \\
 \swarrow & & & \searrow \\
 \text{Este término es el cuadrado de } 3x \text{ ya que} & & & \text{Este término es el cuadrado de } 2 \text{ ya que} \\
 (3x)^2 = 9x^2 & & & 2^2 = 4
 \end{array}$$

Entonces resulta: $9x^2 - 4 = (3x + 2)(3x - 2)$

Factorización por Ruffini

Si al dividir un polinomio $p(x)$ por otro de la forma $x - a$, el cociente es $c(x)$ y el resto $r(x)$, se cumple:

$$p(x) = (x - a) \cdot c(x) + r(x)$$

Si el resto de la división es cero, resulta que $p(x) = (x - a) c(x)$ y se puede decir que:

- $p(x)$ es divisible por $c(x)$,
- a es un cero del polinomio, por lo que $p(a) = 0$,
- $(x - a)$ es un factor de $p(x)$.

A partir de las afirmaciones anteriores, resulta que, si $x_1, x_2, \dots, x_n$ son los ceros de $p(x)$, se puede escribir: $p(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$ donde a_0 es el coeficiente principal de $p(x)$.

Esta última expresión corresponde a la factorización completa de un polinomio.

Nota. Las siguientes propiedades ayudan a determinar todos los ceros de un polinomio.

- Todo polinomio tiene tantos ceros como lo indica su grado.
- Si el polinomio $p(x)$, de grado n , con coeficientes enteros y término independiente no nulo, admite un cero racional $\frac{q}{r}$ (fracción irreducible), entonces q es divisor del término independiente y r es divisor del coeficiente principal.

Pasos a seguir para factorizar un polinomio aplicando la regla de Ruffini

1) Encontrar los posibles ceros racionales del polinomio. Para ello se debe:

- Buscar todos los divisores del término independiente.
- Buscar todos los divisores del coeficiente principal.

- Determinar los *posibles ceros racionales* haciendo el cociente entre los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente principal.

$$\frac{q}{r} \rightarrow \text{divisores del término independiente}$$

$$\frac{q}{r} \rightarrow \text{divisores del coeficiente principal}$$

2) Determinar cuáles de los posibles ceros racionales son efectivamente ceros del polinomio, usando el teorema del resto o aplicando la regla de Ruffini para dividir.

3) Escribir el polinomio factorizado $p(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)$.

Ejemplo. Factorice $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$

Para factorizar el polinomio se sigue los pasos:

1) Se determinan los posibles ceros racionales:

- divisores del término independiente (-3): +1, -1, +3, -3
- divisores del coeficiente principal (2): +1, -1, +2, -2
- los posibles ceros racionales son $\frac{q}{r} = \frac{\text{divisores de } -3}{\text{divisores de } 2} = \frac{+1, -1, +3, -3}{+1, -1, +2, -2}$ y son $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm 3$

2) Se determina cuáles de los posibles ceros racionales son efectivamente ceros del polinomio. En este caso se utiliza el teorema del resto:

$$p(1) = 2.(1)^3 - 3.(1)^2 - 8.(1) - 3 = -12 \Rightarrow 1 \text{ no es cero}$$

$$p(-1) = 2.(-1)^3 - 3.(-1)^2 - 8.(-1) - 3 = 0 \Rightarrow -1 \text{ es cero}$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 8.\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = -7,5 \Rightarrow \frac{1}{2} \text{ no es cero}$$

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 2.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 8.\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \text{ es cero}$$

$$p(3) = 2.(3)^3 - 3.(3)^2 - 8.(3) - 3 = 0 \Rightarrow 3 \text{ es cero}$$

Como el polinomio es de grado tres, debe tener tres ceros, que son $-1, -\frac{1}{2}$ y 3 .

3) Conocidos los ceros, se puede escribir el polinomio en forma factorizada.

$$p(x) = 2 \cdot (x - (-1)) \cdot (x - (-\frac{1}{2})) \cdot (x - (3)) \Rightarrow p(x) = 2 \cdot (x + 1) \cdot (x + \frac{1}{2}) \cdot (x - 3)$$

Ejemplo. Compruebe que $(x - 3)$ es un factor de $q(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ y factorice $q(x)$ por completo.

Solución.

Sustituyendo, se ve que $q(3) = 3^3 - 4.3^2 + 3 + 6 = 0$. Esto significa que $(x - 3)$ es un factor de $q(x)$. Utilizando la regla de Ruffini para dividir se puede terminar de factorizar el polinomio.

	1	-4	1	6	Como ya se comprobó antes, $(x - 3)$ es un factor de $q(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ y se puede escribir: $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 3)(x^2 - x - 2)$
3		3	-3	-6	Se repite el procedimiento para factorizar el trinomio. Se puede comprobar que -1 y 2 son los otros ceros.
	1	-1	-2	0	
-1		-1	2		
	1	-2	0		
2		2			
	1	0			La factorización completa queda $q(x) = (x - 3) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$

Casos combinados

En algunos polinomios se pueden aplicar distintos procedimientos de factorización, hasta que el polinomio quede expresado en factores primos (expresiones que no se pueden factorizar más).

Ejemplos. Factorice completamente los polinomios $p(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ y $q(x) = 2x^2 - 2$.

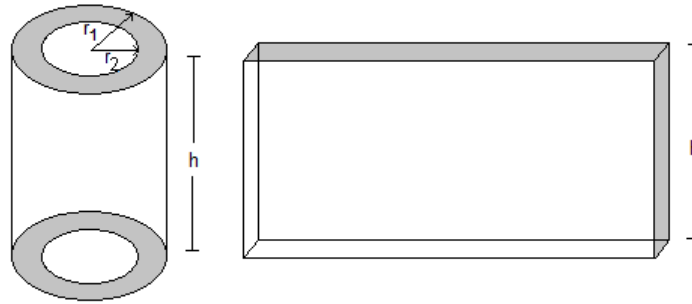
Solución.

Para el polinomio $p(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$: $x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1)$ $= x^2(x - 1)^2$	En primer lugar se puede extraer factor común x^2. La expresión $x^2 - 2x + 1$ es un trinomio cuadrado perfecto, por lo que se factoriza como el cuadrado de un binomio.
Para el polinomio $q(x) = 2x^2 - 2$: $2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1)$ $= 2(x - 1)(x + 1)$	Se puede extraer factor común 2. $x^2 - 1$ es una diferencia de cuadrados por lo que se factoriza como el producto de una suma por una resta.

Ejemplo. Una alcantarilla está construida mediante tubos cilíndricos de cemento, como se muestra en la figura. Teniendo en cuenta la fórmula del volumen de un cilindro, explique por qué se puede expresar el volumen del cascarón cilíndrico con la expresión $V = \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h$

a) Factorice la expresión anterior para demostrar que el volumen del cascarón se puede encontrar con la fórmula: $V = 2\pi \cdot \text{radio promedio} \cdot \text{altura} \cdot \text{espesor}$

b) Interprete geométricamente la fórmula anterior teniendo en cuenta la figura en la que el cascarón cilíndrico se abre y se aplana convirtiéndose en una caja rectangular.



Solución.

a) La fórmula que permite calcular el volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$, donde r es la medida del radio de la base del cilindro y h es la medida de su altura.

Observando la figura, es fácil determinar que el volumen del cascarón cilíndrico se calcula restando el volumen V_2 del cilindro interior al volumen V_1 del cilindro exterior $V = V_1 - V_2$

Como la altura es h , el radio interior r_1 y el radio exterior r_2 , resulta:

$$V = \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h$$

Para factorizar la expresión anterior se puede, en primer lugar, sacar factor común πh : $V = \pi h (r_1^2 - r_2^2)$

La resta del paréntesis es una diferencia de cuadrados.

Factorizándola se obtiene: $V = \pi h (r_1 + r_2) (r_1 - r_2)$

Multiplicando y dividiendo la fórmula anterior por dos, se obtiene: $V = 2\pi h \frac{(r_1 + r_2)}{2} (r_1 - r_2)$

Que es lo mismo que: $V = 2\pi \frac{(r_1 + r_2)}{2} h (r_1 - r_2)$, donde $\frac{(r_1 + r_2)}{2}$ es el radio promedio de los radios de los cilindros interior y exterior, $(r_1 - r_2)$ es el espesor del cascarón y h su altura, por lo que:

$$V = 2\pi \cdot \text{radio promedio} \cdot \text{altura} \cdot \text{espesor}$$

b) Al desenrollar el cascarón, como se muestra en la figura, se aplanar y se convierte en una caja rectangular de escaso grosor donde el largo de la caja será la longitud $\left(2\pi \frac{(r_1 + r_2)}{2}\right)$ de la circunferencia de radio promedio de r_1 y r_2 , el ancho es el espesor del cascarón $(r_1 - r_2)$ y la altura es la misma de los cilindros (h). El volumen de esta caja (prisma rectangular) se calcula haciendo superficie de la base por la altura. Esto coincide con la fórmula anterior.

ACTIVIDADES SECCIÓN 2.3

1) Determine el factor común en los siguientes polinomios.

a) $5a^4 - 10a + 15a^3 + 20a^2$

b) $x^3 y^2 + 6x^2 y$

c) $\frac{2}{9}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2$

d) $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x$

2) ¿Cuáles de los siguientes son trinomios cuadrados perfectos y cuáles no? Justifique su respuesta. En todos los casos, factorice el trinomio.

a) $1 - 6a + 9a^2$ b) $x^2 - 9x + 18$ c) $64x^2 + 80x + 25$

d) $4a^2 - 28a + 49$ e) $x^2 - 8x + 7$ f) $x^2 + x - 2$

3) Factorice los siguientes polinomios usando diferencia de cuadrados.

a) $4z^2 - 25$ b) $81x^6 - 49$ c) $16m^2 - 9$

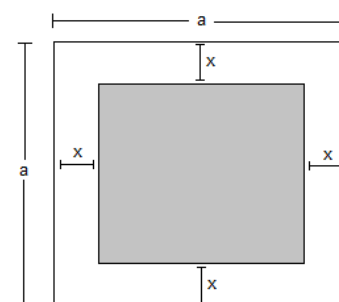
4) Factorice los siguientes polinomios utilizando distintos casos de factoreo.

a) $xy^2 - 9x$ b) $3x^2 + 9x - 30$ c) $3x^3 + x^2 - 3x - 1$ d) $8x^4 - 8$

5) En un terreno cuadrado de a metros de ancho, se corta cada semana el pasto en los bordes, dejando sin cortar un cuadrado central para que sirva de hábitat de pájaros y pequeños animales. Si la franja que se corta es de x metros de ancho:

a) Explique por qué el área de la parte del terreno a la que se corta el pasto es $a^2 - (a - 2x)^2$.

b) Factorice la expresión del inciso anterior para mostrar que el área se puede escribir también como $4x(a - x)$.



6) Determine el valor de m para que $p(x) = 3x^2 + mx + 4$ tenga como uno de sus ceros a $x = 1$. Para ese valor de m halle el otro cero y factorice.

7) Calcule el valor de a para que el polinomio $q(x) = 3x^3 + ax^2 - 3x - 6$ tenga como una de sus ceros a -2 , y para ese valor de a hallado, determine los otros ceros. Factorice el polinomio.

2.4 Expresiones racionales

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, tal que $q(x)$ es distinto de cero, el cociente $\frac{p(x)}{q(x)}$ se denomina expresión racional.

El polinomio $p(x)$ es el numerador y el polinomio $q(x)$ es el denominador.

Como las expresiones racionales son cocientes en los que las variables representan números reales, las propiedades de los números se aplican a las expresiones racionales. Esto es muy importante ya que para sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones racionales se siguen las mismas reglas que para las fracciones.

Algunos ejemplos de expresiones racionales son: $\frac{5x^2 - 2}{x - 3}$, $\frac{1}{x^4 + 8}$, $\frac{3x + 2}{x^2 - 4}$.

Como no existe la división por cero, el denominador de una expresión racional no debe ser igual a cero. Por lo tanto, en el primer ejemplo $x \neq 3$ y en el tercero, $x \neq 2$ y $x \neq -2$. El segundo ejemplo no tiene restricciones ya que el denominador no se anula para ningún número real.

Una expresión racional es *irreducible* si no existen en ella factores comunes al numerador y al denominador. Por ejemplo, $\frac{2x - 4}{x - 3}$ es una expresión racional irreducible ya que el numerador y el denominador no tienen factores en común.

La expresión $\frac{2x^2 - 8}{3x - 6}$ es reducible ya que si se factorizan el numerador y el denominador se pueden cancelar factores en común.

$$\frac{2x^2 - 8}{3x - 6} = \frac{2(x^2 - 4)}{3(x - 2)} = \frac{2(x + 2)(x - 2)}{3(x - 2)} = \frac{2(x + 2)}{3}, \text{ si } x \neq 2.$$

Simplificación

Para reducir una expresión racional a su mínima expresión, se factoriza completamente el numerador y el denominador, se simplifican los factores comunes a ambos, si existen, y se obtiene así una expresión irreducible equivalente a la original.

Ejemplo. Si es posible, simplifique las expresiones:

a) $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$

b) $\frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 - 3x}$

Solución.

a) En el numerador se factoriza usando diferencia de cuadrados y se cancelan los factores comunes.

Resulta: $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2, \text{ si } x \neq 2$

Se observa que la cancelación del factor $(x - 2)$ es válida sólo para aquellos valores de x tales que $(x - 2)$ sea diferente de cero. Por eso, aunque la expresión simplificada $(x + 2)$ se define para todo número real, se debe tener en cuenta la restricción para la expresión original $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

b) Tanto en el numerador como en el denominador se extrae factor común y se obtiene:

$$\frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{x(x + 1)}{x(x^2 - 2x - 3)}$$

Luego en el denominador se factoriza el trinomio y se simplifica:

$$\frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{x(x + 1)}{x(x^2 - 2x - 3)} = \frac{x(x + 1)}{x(x + 1)(x - 3)} = \frac{1}{x - 3}, \text{ si } x \neq 0, x \neq -1, x \neq 3$$

La cancelación de los factores x y $(x + 1)$ es válida para aquellos valores de x tales que x y $(x + 1)$ son distintos de cero. Por esto, aunque la expresión simplificada $\frac{1}{x - 3}$ se define para $x = 0$ y $x = -1$, se

deben tener en cuenta las restricciones para la expresión original $\frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 - 3x}$.

Multiplicación de expresiones racionales

El resultado de multiplicar dos expresiones racionales es otra expresión racional cuyo numerador y denominador son el producto de los numeradores y denominadores de las expresiones dadas.

Es decir: $\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x) \cdot r(x)}{q(x) \cdot s(x)}$

Se factorizan los numeradores y denominadores, se simplifican los factores comunes (si los hay) y luego se opera.

Ejemplo.
$$\frac{x^2}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{3x^3-3x} = \frac{x^2}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{x+2}{3x(x-1)(x+1)} = \frac{x}{3(x-2)(x-1)(x+1)},$$

con $x \neq -2$, $x \neq 2$, $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq 1$.

División de expresiones racionales

El resultado de dividir dos expresiones racionales es otra expresión racional que se obtiene multiplicando la primera por la recíproca de la segunda.

$$\frac{p(x)}{q(x)} : \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{s(x)}{r(x)} = \frac{p(x) \cdot s(x)}{q(x) \cdot r(x)}$$

Ejemplo.
$$\frac{x}{x-2} : \frac{x+2}{3x-1} = \frac{x}{x-2} \cdot \frac{3x-1}{x+2} = \frac{x(3x-1)}{(x-2)(x+2)}, \text{ si } x \neq -2, x \neq 2$$

Tanto en la multiplicación como en la división se debe simplificar siempre que sea posible.

Ejemplo.
$$\frac{\frac{x-1}{x^2+4x+4}}{\frac{x-2}{x^2-4}} = \frac{x-1}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{x-1}{(x+2)^2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \frac{x-1}{x+2}, \text{ si } x \neq -2, x \neq 2.$$

Suma y resta de expresiones racionales

Para sumar o restar expresiones que tienen igual denominador, se escribe el mismo denominador, se suman o restan sus numeradores y, si es posible, se simplifica.

Ejemplo.
$$\frac{x}{x-2} + \frac{x+2}{x-2} - \frac{1-x^2}{x-2} = \frac{x+x+2-(1-x^2)}{x-2} = \frac{x^2+2x+1}{x-2} = \frac{(x+1)^2}{x-2}, \text{ si } x \neq 2$$

Si las expresiones tienen distinto denominador, se debe sacar común denominador entre ellos. Este denominador común es el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores de las expresiones originales y se obtiene multiplicando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplo. Para resolver $\frac{1}{2x-2} + \frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}$ se factorizan los denominadores y se halla el mínimo común múltiplo (MCM).

$$\frac{1}{2x-2} + \frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{x}{x+1}$$

Se saca común denominador, que es el producto de los factores comunes y no comunes con el mayor exponente:

$$\frac{1}{2x-2} + \frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{x}{x+1} = \frac{x+1+4-2x(x-1)}{2(x-1)(x+1)}$$

Se opera en el numerador resultante, se lo factoriza y se simplifica, si es posible:

$$\frac{x+1+4-2x^2+2x}{2(x-1)(x+1)} = \frac{-2x^2+3x+5}{2(x-1)(x+1)} = \frac{-2(x+1)\left(x-\frac{5}{2}\right)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{-\left(x-\frac{5}{2}\right)}{(x-1)}, \text{ si } x \neq -1, x \neq 1.$$

Operaciones combinadas

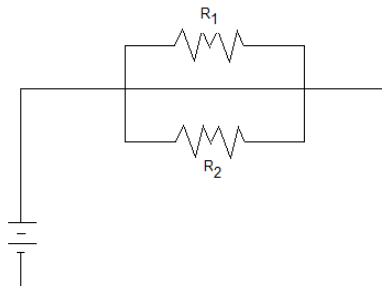
Para resolver una operación combinada se debe:

- separar en términos,
- efectuar las operaciones indicadas en cada término,
- si es posible, simplificar e indicar las restricciones.

Ejemplo. Aplicación a electricidad

La figura muestra un circuito eléctrico que tiene dos resistores conectados en paralelo. Considerando la resistencia de cada uno R_1 y R_2 ohms, su resistencia combinada R está dada por la fórmula:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$



a) Opere el lado derecho para expresar R en forma racional.

b) Obtenga el valor de R para $R_1 = 5$ ohms y $R_2 = 12$ ohms. Expresé el resultado truncando a los centésimos.

a) Sacando común denominador en el denominador del miembro derecho resulta:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2}} = 1 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 + R_1} \Rightarrow R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 + R_1}$$

b) Reemplazando R_1 y R_2 se obtiene: $R = \frac{5 \cdot 12}{12 + 5} = \frac{60}{17}$

Para esos valores la resistencia combinada es de 3,52 ohms.

ACTIVIDADES SECCIÓN 2.4

1) Simplifique las siguientes expresiones racionales indicando las restricciones necesarias.

a) $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$

b) $\frac{x^5 - 16x}{x^2 - 2x}$

c) $\frac{x^3 - x^2}{x^3 + x^2 - 2x}$

2) Resuelva las operaciones indicadas y simplifique si es posible:

a) $\frac{2}{x^2 - 3x} \cdot \frac{x - 3}{x}$

b) $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 1} : \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2}$

c) $\frac{1}{x} \cdot \frac{x + 1}{x^2 + x} \cdot \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

d) $\frac{2x^3 - x^2 - 8x + 4}{x^4 - 16} : \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$

e) $\frac{2x}{x + 4} + \frac{8}{x + 4}$

f) $\frac{6x^2}{4x - 8} - \frac{12x}{4x - 8}$

g) $\frac{2x - x^3}{x^2} - \frac{x(x + 2)}{x^2}$

h) $\frac{1 + x}{x^2 - 1} + \frac{5x^2 + x}{x^2 - 1} - \frac{4x^2}{x^2 - 1}$

i) $(x - 1) : \left(x - \frac{1}{x}\right)$

j) $\left(\frac{x}{x - 3} + \frac{2}{x^2 - 6x + 9}\right) : \frac{x - 2}{x - 3}$

k) $\frac{x - 1}{x^2 - 4} \cdot \left(x + \frac{x - 4}{x - 1}\right)$

l) $\left(\frac{3}{x} + \frac{x + 2}{x^2 - 1} + \frac{3}{x^3 - x}\right) \cdot \frac{1}{4x + 2}$

m) $\frac{2}{x} - \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + x}$

n) $\frac{3x - 3}{x^2 + x} : \frac{6}{x + 1} + \frac{x - 1}{x}$

o) $\frac{1}{x} + \frac{2x}{2 - x} \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x + 1}\right)$

3) Un circuito eléctrico tiene 3 resistores conectados en paralelo. Si la resistencia de cada uno es R_1 , R_2 y R_3 ohms, respectivamente, su resistencia combinada R está dada por $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. Escriba R como una expresión racional y evalúe para $R_1 = 4$ ohms, $R_2 = 6$ ohms y $R_3 = 9$ ohms.

4) La frecuencia de vibración f de un órgano de un tubo abierto varía de forma inversa respecto a la longitud L del tubo.

a) Si el aire en un tubo de dos metros de longitud vibra 60 veces por minuto, escriba f como una expresión racional de L .

b) Calcule la frecuencia en un tubo con 1,5 metros de largo.

5) La iluminación I producida por una fuente de luz varía en forma inversa respecto al cuadrado de la distancia d hasta la luz.

a) Si la iluminación producida a tres metros de una luz es de 12 lúmenes, escriba I como una expresión racional de d .

b) Calcule la iluminación a dos metros de la luz.

RESPUESTAS CAPÍTULO 2

RESPUESTAS SECCIÓN 2.1 - 2.2

1)a) Ancho: x ; Largo: $x + 5$

b) Longitud: x ; Ancho: $\frac{1}{2}x$

c) Trozo más corto: x ; Trozo más largo: $20 - x$

2)a) La mitad del número disminuida en el sucesor del número.

b) Las tres cuartas partes de un número aumentada en el doble del número.

c) El doble de un número disminuido en 1. El antecesor del doble de un número.

3) Son polinomios las expresiones de **(b)**, **(c)** y **(f)**.

La expresión de **(a)** y **(d)** no son polinomios pues el exponente de la variable es un entero negativo.

La expresión de **(e)** no es un polinomio pues el exponente de la variable es un racional.

5)a) $-1,5x^2 - 0,8x + 0,1$

b) $0,1x^3 - 1,1x^2 + 1,5$

c) $0,02x^5 - 0,2x^4 + 0,2x^2$

d) $2x^3 - 3x^2 - 0,4x$

e) $4x^2 - 4x + 1$

f) $x^2 - 0,2x + 2$

g) $-4x^3 + 2x^2 + 1$

h) $4x^2 + 2x + 6$

6) $p(-1) = -6,5$; $p(0) = -3$; $p(2) = -2$; $p(3) = 7,5$

7) 1 y 5 son ceros pues el valor numérico en ellos es 0.

8) $a = -2$

9)a) $c(x) = -2x^2 - x$; $r = -5$

b) $c(x) = 0,5x^3 - 0,5x^2 + 1,5x - 2,5$; $r = 3,5$

c) $c(x) = x^2 + 2x + 4$, $r = 0$

10) $a(x) = -x^2 + 20x$, $a(4) = -4^2 + 20 \cdot 4 = -16 + 80 = 64$

11) $a(x) = \frac{1}{3}x^2 + x$

12) $v(r) = \frac{5}{3}\pi r^3 + 5,5\pi r^2$

13) $g(x) = -0,000001x^3 - 0,02x^2 + 500x - 60000$.

14)a) $v(x) = \frac{x^4}{5}$

b) $16,2 \text{ m}^3$

15)a) Largo $l(x) = 20 - 2x$

b) Ancho $a(x) = 15 - 2x$

c) Alto $h(x) = x$

d) Área $m(x) = 300 - 4x^2$

e) Volumen $v(x) = (20 - 2x) \cdot (15 - 2x) \cdot x$, $v(x) = 4x^3 - 70x^2 + 300x$

f) Largo: 14 cm Ancho: 9 cm Alto: 3 cm Área: 264 cm^2 Volumen: 378 cm^3

RESPUESTAS SECCIÓN 2.3

1) a) $5a.(a^3 - 2 + 3a^2 + 4a)$ b) $x^2y.(xy + 6)$ c) $\frac{2}{3}x^2\left(\frac{1}{3}x^3 - 5x + 1\right)$ d) $\frac{1}{2}x\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$

2) Los trinomios de los incisos a), c) y d) corresponden a trinomios cuadrados perfectos.

a) $(1 - 3a)^2$ b) $(x - 6)(x - 3)$ c) $(8x + 5)^2$ d) $(2a - 7)^2$ e) $(x - 7)(x - 1)$ f) $(x - 1)(x + 2)$

3) a) $(2z + 5)(2z - 5)$ b) $(9x^3 + 7)(9x^3 - 7)$ c) $(4m + 3)(4m - 3)$

4) a) $x(y + 3)(y - 3)$ b) $3.(x - 2).(x + 5)$ c) $3.(x + 1)(x - 1)\left(x + \frac{1}{3}\right)$ d) $8(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$.

5) a) El terreno completo es un cuadrado de lado a , por lo tanto, su área es a^2 . Como se corta una franja de x metros de ancho en cada borde, el cuadrado central que queda sin cortar, tiene lado $a - 2x$ y su área es: $(a - 2x)^2$.

Entonces, el área de la parte del terreno donde se corta el pasto se obtiene restando al área total el área del cuadrado central: $a^2 - (a - 2x)^2$.

b) Desarrollando el cuadrado de un binomio y suprimiendo paréntesis, se obtiene:

$$a^2 - (a - 2x)^2 = a^2 - (a^2 - 4ax + 4x^2) = a^2 - a^2 + 4ax - 4x^2 = 4ax - 4x^2$$

Luego, sacando factor común $4x$:

$$a^2 - (a - 2x)^2 = 4ax - 4x^2 = 4x(a - x)$$

Así, el área de la franja de pasto cortada puede expresarse como $4x(a - x)$

6) $m = -7$. El otro cero es $\frac{4}{3}$ y su factorización es $p(x) = 3(x - 1)\left(x - \frac{4}{3}\right)$

7) $a = 6$. Los otros ceros son 1 y -1 . Su factorización es $q(x) = 3(x + 2)(x - 1)(x + 1)$.

RESPUESTAS SECCIÓN 2.4

1) a) $\frac{x+2}{x}$, si $x \neq 3$, $x \neq 0$ b) $(x^2 + 4)(x + 2)$, si $x \neq 2$, $x \neq 0$ c) $\frac{x}{x+2}$, si $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -2$

2) a) $\frac{2}{x^2}$, si $x \neq 0$, $x \neq 3$ b) $\frac{x-2}{x+1}$, si $x \neq -2$, $x \neq -1$, $x \neq -3$

c) $\frac{x+1}{x^2}$, si $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 1$ d) $\frac{2x-1}{(x^2+4).(x+2)}$, si $x \neq -2$, $x \neq 2$ e) 2 , $x \neq -4$

f) $\frac{3x}{2}$, si $x \neq 2$ g) $-x-1$, $x \neq 0$ h) $\frac{x+1}{x-1}$, si $x \neq -1$, $x \neq 1$ i) $\frac{x}{x+1}$, si $x \neq -1$, $x \neq 1$

j) $\frac{x-1}{x-3}$, si $x \neq 2$, $x \neq 3$ k) 1 , $x \neq -2$, $x \neq 2$, $x \neq 1$ l) $\frac{1}{(x-1)(x+1)}$, si $x \neq -1$, $x \neq 1$, $x \neq 0$, $x \neq -\frac{1}{2}$

m) $\frac{-x^2+2x-2}{x(x+1)}$, si $x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1$ **n)** $\frac{3x-3}{2x}$, si $x \neq 0, x \neq -1$ **o)** $\frac{3x+1}{x(x+1)}$, si $x \neq 0, x \neq -1, x \neq 2$

3) $R = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}$, $R = \frac{36}{19}$

4)a) $f = \frac{120}{L}$ **b)** 80 veces por minuto

5)a) $I = \frac{108}{d^2}$ **b)** 27 lúmenes

3. Ecuaciones e inecuaciones

Innumerables situaciones correspondientes a diversas áreas y situaciones cotidianas se pueden modelar mediante ecuaciones e inecuaciones. Para la resolución de un problema matemáticamente, el primer paso debe ser traducir del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico.

Ejemplo. En la siguiente lista se escriben en lenguaje matemático algunos enunciados frecuentes. La comprensión de esta forma de expresión es fundamental para el planteo de problemas específicos.

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico
Las tres cuartas partes de un número es igual a 20.	Llamando x al número, se escribe $\frac{3}{4}x = 20$
El perímetro de un rectángulo es 14 metros y su largo es cinco metros menor que el triple de su ancho.	Llamando x al ancho resulta $x + 3x - 5 + x + 3x - 5 = 14$ Luego, $8x - 10 = 14$
La mitad del consecutivo de un número entero x es igual a 17.	$\frac{1}{2}(x+1) = 17$
El cuadrado de la mitad de un número z es 81.	$\left(\frac{1}{2}z\right)^2 = 81$

3.1 Ecuaciones

Las expresiones donde aparecen números y letras, en dos miembros que se relacionan a través de una igualdad, se denominan ecuaciones.

Definición. Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones conteniendo uno o más valores desconocidos.

Las expresiones que aparecen a ambos lados del símbolo = (igual) se llaman **miembros** de la ecuación. Los valores desconocidos se llaman **incógnitas** y se utiliza cualquier letra para su representación. Los números que “acompañan” a las incógnitas se denominan coeficientes.

Cualquier valor que haga cierta la igualdad se llama **solución** de la ecuación.

Resolver una ecuación es hallar el valor (o los valores) de la incógnita, de manera que la igualdad sea cierta si se reemplaza dicha incógnita por cualquiera de los valores hallados.

Dependiendo del caso, el valor buscado puede ser único, pueden existir varios valores que hagan la igualdad cierta, o puede ocurrir que no exista valor alguno.

El conjunto formado por todas las soluciones de la ecuación se llama **conjunto solución**.

Ecuación lineal con una incógnita

Una ecuación lineal con una incógnita es una ecuación del tipo $ax + b = 0$ donde a y b son números reales y x es la incógnita.

Ejemplos. $3x - 2 = 0$; $5x = 1$ son ecuaciones lineales.

Ecuaciones equivalentes

Se dice que dos ecuaciones son *equivalentes* si tienen el mismo conjunto de soluciones.

La clave para resolver una ecuación es que se pueda transformar en ecuaciones equivalentes cada vez más simples, utilizando la **propiedad uniforme**. Esta propiedad establece que:

Si se realiza la misma operación con el mismo número en ambos miembros de una ecuación, se mantiene la igualdad.

Ejemplo. El doble de un número es equivalente a la suma de 84 y la mitad de dicho número. ¿Cuál es el número?

Solución.

Antes de comenzar a plantear un problema se debe indicar siempre qué representa cada letra o símbolo utilizado. En este caso, se llama x al número buscado.

En el enunciado aparecen involucrados el doble del número (es decir $2x$) y también, su mitad ($x:2$). Por lo tanto, se establece que $2x = 84 + x : 2$, o que es equivalente a

$$2x = 84 + \frac{1}{2}x$$

1) Se agrupan en el mismo miembro los términos semejantes, para lo cual se aplica la propiedad uniforme restando a ambos miembros $\frac{1}{2}x$

$$2x = 84 + \frac{1}{2}x$$

$$2x - \frac{1}{2}x = 84 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x$$

2) Se restan los términos semejantes

$$2x - \frac{1}{2}x = 84$$

$$\frac{3}{2}x = 84$$

3) Se aplica la propiedad uniforme, dividiendo ambos miembros por $3/2$ y se resuelven las operaciones

$$\frac{3}{2}x : \frac{3}{2} = 84 : \frac{3}{2}$$

4) Se resuelve la división

$$x = 84 : \frac{3}{2}$$

$$x = 56$$

Verificación. El procedimiento denominado *verificación* consiste en comprobar que la igualdad se cumple al reemplazar la incógnita por el o los valores obtenidos.

$$2x - \frac{1}{2}x = 84$$

$$2.56 - \frac{1}{2}.56 = 84$$

Se reemplaza por el valor obtenido.

$$112 - 28 = 84$$

Se resuelven ambos miembros por separado.

$$84 = 84 \checkmark$$

Se verifica la igualdad, entonces 56 es solución de la ecuación

¿Cómo resolvemos un problema?

Un problema es una situación que encierra un interrogante cuya respuesta se puede hallar. El proceso de resolución de problemas requiere capacidad de transferir experiencias pasadas a situaciones nuevas, para lo cual es necesario: **a)** analizar la nueva situación, **b)** determinar relaciones, **c)** seleccionar, entre los principios y conceptos conocidos, aquellos que sirven para resolverlas y **d)** aplicar convenientemente estos principios.

Para resolver un problema, se pueden tener en cuenta las siguientes etapas:

- **COMPRENDER** el problema: establecer incógnitas, datos, saber distinguir lo importante de lo superfluo.
- **CONCEBIR Y EJECUTAR UN PLAN:** que permita, con los recursos disponibles, encontrar la solución al problema.
- **EXAMINAR** la solución obtenida.

- **ELABORAR CONCLUSIONES:** la solución que se acepta o rechaza permite llegar a una conclusión, la que resuelve el problema y determina el comienzo de una nueva investigación.

Ejemplo. En un establecimiento agrícola-ganadero se destinan la cuarta parte del total de hectáreas para la siembra de trigo, la quinta parte del total para la siembra de soja y aún quedan 330 hectáreas para ganadería. ¿Cuál es la cantidad total de hectáreas que posee el establecimiento?

Solución.

Teniendo en cuenta los pasos a seguir para resolver un problema:

- **COMPRENDER** el problema.

Incógnita: es lo que se pide determinar en la situación planteada. En este caso, es la cantidad total de hectáreas que posee el establecimiento y la llamamos x .

Datos. Sabemos que, del total de hectáreas del establecimiento, la cuarta parte se destina a la siembra de trigo y la quinta parte a soja, quedando 330 hectáreas disponibles para ganadería.

- **CONCEBIR y EJECUTAR** un plan.

Como x corresponde a la cantidad total de hectáreas, la cuarta parte asignada a la siembra de trigo se representa con $\frac{1}{4}x$. De manera análoga, la cantidad de hectáreas para soja se simboliza con $\frac{1}{5}x$.

Se puede plantear una ecuación sabiendo que las hectáreas destinadas a trigo, a soja y las aún disponibles deben ser igual al total de hectáreas disponibles.

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + 330 = x$$

Resolviendo la ecuación:

$$330 = x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}x \Rightarrow 330 = \frac{20x - 5x - 4x}{20} \Rightarrow 330 = \frac{11}{20}x \Rightarrow 330 : \frac{11}{20} = x \Rightarrow 600 = x$$

- **EXAMINAR** la solución obtenida y **ELABORAR CONCLUSIONES**.

Se puede verificar que $x = 600$ satisface las condiciones planteadas:

$$\frac{1}{4} \cdot 600 + \frac{1}{5} \cdot 600 + 330 = 600$$

$$150 + 120 + 330 = 600 \checkmark$$

De esta manera, podemos escribir la respuesta a la situación planteada.

Respuesta. Hay, en total, 600 hectáreas.

Ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas con una incógnita son ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$.

Por ejemplo, $3x^2 = x + 1$, $x^2 + 3 = 0$ son ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo. Resolución de una ecuación cuadrática con $b = 0$

$$2x^2 - 8 = 0 \quad \text{Despejo la incógnita } x$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 8 : 2$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ o bien } x = -2$$

Ejemplo. Resolución de ecuación cuadrática con $c = 0$

$$x^2 - 3x = 0 \quad \text{Se extrae como factor común a } x$$

$$x \cdot (x - 3) = 0$$

Luego, es necesario utilizar la siguiente propiedad:

Propiedad. Un **producto** es **cero** sí y sólo sí uno o más de sus factores es **cero**. (*)

Entonces, teniendo en cuenta que en la ecuación el producto es igual a cero, debe ser:

$$x = 0 \text{ o bien } x - 3 = 0.$$

Por lo tanto, la solución de esta ecuación es $x = 0$ y $x = 3$.

Ejemplo. Ecuación cuadrática con todos los coeficientes distintos de cero

Para este tipo de ecuaciones es necesario recurrir a la fórmula de resolvente, la cual nos permite calcular los valores de x que satisfacen la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

$$\text{Fórmula resolvente: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo. Resuelva la ecuación $x^2 - 5 \cdot (x - 1) = -1$

Solución.

$$x^2 - 5 \cdot (x - 1) = -1 \quad \text{Mediante operaciones se escribe la ecuación de la forma } ax^2 + bx + c = 0 \text{ para distinguir los coeficientes } a, b \text{ y } c. \text{ En este caso, se aplica propiedad distributiva (se recomienda separar en términos primero)}$$

$$x^2 - 5x + 5 = -1$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \text{Se aplica la fórmula resolvente}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Por lo tanto, las soluciones son: $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ y $x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$. Se puede verificar que ambos valores satisfacen la ecuación dada.

Entonces, el conjunto solución es $S = \{2 ; 3\}$.

Nota. No toda ecuación cuadrática tiene siempre dos soluciones reales distintas. Puede ocurrir que las soluciones sean iguales o incluso que no tenga.

Ejemplo. Resolución de una ecuación con ecuación cuadrática sin solución real

$$x \cdot (7-x) = 5 \cdot (x+2) \quad \text{Se aplica propiedad distributiva en ambos miembros}$$

$$7x - x^2 = 5x + 10$$

$$-x^2 + 2x - 10 = 0 \quad \text{Se aplica la fórmula resolvente}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-10)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 40}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{-2}$$

La raíz cuadrada de un número negativo no tiene solución real. Luego, la ecuación no posee soluciones reales.

Ejemplo. Resuelva la ecuación $\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} = 0$

Solución.

El denominador de la ecuación se anula para $x = 2$, por lo tanto, dicho valor no podrá ser solución de la ecuación.

Un cociente es nulo si y sólo si el numerador es nulo y el denominador es distinto de cero, por eso se plantea: $x^2 + 2x - 3 = 0$

Aplicando la resolvente surge que las soluciones son $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. Entonces su forma factorizada resulta: $(x - 1)(x + 3) = 0$

Para que un producto sea nulo cualquiera de sus factores puede ser nulo, es decir:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{o} \quad x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

Como ninguno de estos valores anula el denominador, el conjunto solución es $S = \{1; -3\}$.

Ecuaciones polinomiales

Ejemplo. Resuelva la ecuación $x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x = 12$

Solución.

La ecuación dada es equivalente a $x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12 = 0$

Se factoriza el polinomio que aparece a la izquierda, para lo cual se obtienen sus ceros. Al realizar el procedimiento se determina que los únicos ceros reales son 1 y -3, por lo que la ecuación se transforma en:

$$(x - 1)(x + 3)(x^2 + 4) = 0$$

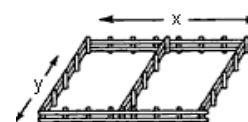
Como en la ecuación anterior, el producto es igual a cero, por propiedad (*) se debe satisfacer que:

$$x - 1 = 0 \quad ; \quad x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x^2 + 4 = 0$$

La última opción no es posible ya que $x^2 + 4 \neq 0$ en el conjunto de los números reales. Por lo tanto, las dos únicas soluciones reales son $x = 1$ y $x = -3$.

Entonces, el conjunto solución es $S = \{-3; 1\}$.

Ejemplo. Un agricultor desea cercar un corral como el de la figura y para ello dispone de 600 metros de cerca. Necesita que el área del corral sea de 15000 metros cuadrados. ¿Qué dimensiones debe tener el corral?



Solución.

En la figura observamos un corral rectangular, que además tiene una cerca en el medio que lo divide en dos partes.

Tenemos dos datos: sabemos cuánta cerca disponemos y qué superficie queremos encerrar. Debemos descubrir cuánto miden los lados.

En el esquema del corral se observan dos lados de longitud x (arriba y abajo) y tres lados de longitud y (los dos laterales y la división del medio). Entonces, como disponemos de 600 metros de cerca, se debe verificar:

$$3y + 2x = 600 \quad (1)$$

Por otro lado, usamos el dato del área. Ya que la figura corresponde a un rectángulo de lados que miden x e y , la expresión del área del corral es $x \cdot y$

O sea, debe cumplirse:

$$x \cdot y = 15000 \quad (2)$$

Obtuvimos dos ecuaciones con dos incógnitas (1 y 2). Para obtener el valor de x e y, despejamos una variable.

Despejando x de la ecuación (1) resulta: $x = 300 - \frac{3}{2}y$ (3)

Ahora reemplazamos esa x en la otra ecuación.

Así, sustituyendo en (2) se obtiene: $\left(300 - \frac{3}{2}y\right) \cdot y = 15000 \Rightarrow -\frac{3}{2}y^2 + 300y - 15000 = 0$

Resolvemos la ecuación cuadrática obtenido, aplicando la fórmula resolvente queda:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-300 \pm \sqrt{300^2 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-15000)}}{2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{-300 \pm \sqrt{90000 - 90000}}{-3} = \frac{-300 \pm \sqrt{0}}{-3} = \frac{-300 \pm 0}{-3}$$

Entonces $y_1 = y_2 = \frac{-300}{-3} = 100$

Reemplazando el valor de y obtenido en (3) resulta: $x = 300 - \frac{3}{2} \cdot 100 \Rightarrow x = 150$

De acuerdo con lo resuelto los lados del corral miden 100 y 150 metros. Podemos comprobar que estos valores cumplen con los datos del problema.

Verificación. Según el enunciado, el área del corral debe ser de 15000 metros cuadrados y la cerca debe medir 600 metros. Verifiquemos:

$$\text{Área} = 150 \cdot 100 = 15000 \text{ m}^2$$

$$\text{Cerca} = 2 \cdot 150 + 3 \cdot 100 = 600 \text{ m}$$

Respuesta. Las dimensiones del corral son 150 metros y 100 metros.

Ejemplo. Un incendio afecta a una zona en la que inicialmente hay 40000 árboles. La cantidad de árboles que aún no han sido consumidos por el fuego, medida en decenas de miles de árboles, puede representarse mediante el polinomio $p(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$, donde x representa el número de semanas transcurridas desde el comienzo del incendio. Determine si existe algún momento en el que el fuego haya consumido todos los árboles de la zona.

Solución.

Se solicita el momento cuando el fuego ha consumido todos los árboles de la zona, es decir, cuando la cantidad de árboles no consumidos por el fuego es 0. Para ello se plantea:

$$p(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = 0$$

Al buscar los ceros del polinomio se encuentra que $x_1 = 2$ es cero del polinomio dos veces.

Factorizando el polinomio se obtiene la ecuación: $(x^2 + 1) \cdot (x - 2)^2 = 0$

Como el producto es igual a cero, cuando alguno de sus factores lo es, resulta:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{o} \quad (x - 2)^2 = 0$$

La opción $x^2 + 1 = 0$ no es posible ya que $x^2 + 1 \neq 0$ en el conjunto de los números reales. Por lo tanto, $(x - 2)^2 = 0$, de donde $x = 2$.

Esta respuesta puede verificarse determinando $p(2)$ y comprobando que es igual a cero.

Respuesta. A las dos semanas el fuego consumió todos los árboles de la zona.

Ecuaciones irracionales

Ejemplo. Halle los valores de x que verifican: $\sqrt{x+11} = x+5$

Solución.

Para resolver la ecuación elevamos ambos miembros al cuadrado y resulta:

$$(\sqrt{x+11})^2 = (x+5)^2 \Rightarrow x+11 = (x+5)^2 \Rightarrow x+11 = x^2 + 10x + 25 \Rightarrow x^2 + 9x + 14 = 0$$

Aplicando la resolvente se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-9 \pm 5}{2}$$

Entonces $x_1 = \frac{-9+5}{2} = -2$ y $x_2 = \frac{-9-5}{2} = -7$ son las soluciones de las ecuaciones de segundo grado que surgieron al elevar al cuadrado a ambos miembros.

Pero observemos qué sucede si reemplazamos dichos valores en la ecuación dada:

- $x_1 = -2$: $\sqrt{-2+11} = -2+5 \Rightarrow \sqrt{9} = 3 \Rightarrow 3 = 3 \checkmark$
- $x_2 = -7$: $\sqrt{-7+11} = -7+5 \Rightarrow \sqrt{4} = -2 \Rightarrow 2 = -2 \times$

En consecuencia, el conjunto solución es $S = \{-2\}$

Ecuaciones logarítmicas

A continuación, se analizan procedimientos que permiten resolver ecuaciones que contienen expresiones logarítmicas. Para ello, se utilizan estrategias básicas en la resolución que se basan en la definición de logaritmo y en propiedades estudiadas.

Ejemplo.

Encuentre los valores de x que verifican la siguiente ecuación $\log_2 (x-1) = 3$.

Solución.

Aplicando la definición de logaritmo se obtiene: $x-1 = 2^3 \Rightarrow x = 9$

$$\text{Verificación: } \log_2 (9-1) \stackrel{?}{=} 3 \Rightarrow \log_2 8 = 3 \Rightarrow \log_2 2^3 = 3 \Rightarrow 3 = 3 \checkmark$$

Por lo tanto, la solución es $x = 9$.

Ejemplo.

Resuelva la ecuación $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$. Verifique la respuesta.

Solución.

Aplicando la propiedad del logaritmo de un producto, resulta $\log_3 x \cdot (x+2) = 1$

Aplicando la definición de logaritmo

$$x \cdot (x+2) = 3^1$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -3$$

Verificación:

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow \log_3 1 + \log_3 (1+2) \stackrel{?}{=} 1 \Rightarrow \log_3 1 + \log_3 3 \stackrel{?}{=} 1 \Rightarrow 0 + 1 \stackrel{?}{=} 1 \Rightarrow 1 = 1 \checkmark$$

$$\text{Si } x = -3 \Rightarrow \log_3 (-3) + \log_3 (-3+2) \stackrel{?}{=} 1$$

El logaritmo está definido para números positivos, por lo que $x = -3$ no es solución.

Luego, la solución es $x = 1$.

Ejemplo.

Halle el o los valores de x que verifican $\log_3(x+3) = 1 - \log_3(x+5)$.

Solución.

El término 1 del segundo miembro puede escribirse como $\log_3 3$: $\log_3(x+3) = \log_3 3 - \log_3(x+5)$

Aplicando la propiedad del logaritmo del cociente, se obtiene: $\log_3(x+3) = \log_3 \frac{3}{x+5}$

Dado que se plantea la igualdad de dos logaritmos de la misma base, se verifica: $x+3 = \frac{3}{x+5}$

Resolviendo: $(x+3) \cdot (x+5) = 3$

$$x^2 + 5x + 3x + 15 = 3$$

$$x^2 + 8x + 12 = 0$$

$$x_1 = -2, x_2 = -6$$

Se sustituyen estos valores en la ecuación dada para verificar si son soluciones:

$$\text{Si } x = -2 \Rightarrow \log_3(-2+3) \stackrel{?}{=} 1 - \log_3(-2+5) \Rightarrow \log_3 1 \stackrel{?}{=} 1 - \log_3 3 \Rightarrow 0 \stackrel{?}{=} 1 - 1 \Rightarrow 0 = 0 \checkmark$$

$$\text{Si } x = -6 \Rightarrow \log_3(-6+3) \stackrel{?}{=} 1 - \log_3(-6+5) \Rightarrow \log_3(-3) \stackrel{?}{=} 1 - \log_3(-1)$$

Como no existe el logaritmo de números negativos, $x = -6$ *no es solución*.

Por lo tanto, la solución de la ecuación dada es $x = -2$.

Nota. Como se observa en los ejemplos, en las ecuaciones logarítmicas es fundamental comprobar la solución en la ecuación original para descartar raíces extrañas.

Ejemplo. Un ingeniero agrónomo realiza un seguimiento semanal de la población de una plaga en un cultivo de soja. A partir de datos obtenidos mediante muestreos de campo, propone utilizar una expresión logarítmica para describir la cantidad promedio de insectos por planta durante las primeras semanas del cultivo, obteniendo que la cantidad estimada de insectos por hectárea, $N(t)$, a las t semanas desde el inicio del monitoreo, está dada por la expresión $N(t) = 50 \ln(2t + 1) + 100$. ¿Después de cuántas semanas la población alcanzará los 200 insectos por hectárea?

Solución.

Se debe determinar para qué valores de t se verifica $N(t) = 200$, de donde resulta la ecuación:

$$50 \ln(2t + 1) + 100 = 200$$

$$\text{Resolviendo queda: } 50 \ln(2t + 1) = 100 \Rightarrow \ln(2t + 1) = 2$$

Aplicando la definición de logaritmo se obtiene: $2t + 1 = e^2$

$$\text{Despejando } t: t = \frac{e^2 - 1}{2} \Rightarrow t \approx 3,2$$

Respuesta. Luego de aproximadamente 3,2 semanas, la población alcanzará los 200 insectos por hectárea.

Ecuaciones con valor absoluto

Ejemplo. Resuelva la ecuación $2|x - 4| - 1 = 5$.

Solución.

A partir de la ecuación dada, aplicando propiedad uniforme se obtiene:

$$2|x - 4| - 1 = 5$$

$$2|x - 4| = 6$$

$$|x - 4| = 3$$

Por definición de valor absoluto, se tiene que:

$x - 4 = 3$	o	$x - 4 = -3$
$x = 3 + 4$	o	$x = -3 + 4$
$x = 7$	o	$x = 1$

Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \{1 ; 7\}$.

ACTIVIDADES SECCIÓN 3.1

1) Resuelva y verifique las siguientes ecuaciones:

- | | | |
|----------------------------------|--|---|
| a) $2(x+3) - 5(-2x+1) = 2x-19$ | b) $\frac{x}{4} + 3 - 3x = 1$ | c) $-2 = \sqrt[3]{y-7}$ |
| d) $ 1 + 5x - 2 = 7$ | e) $2x^4 - 4x^3 + 2x^2 = x^3 + x - 2$ | f) $\left \frac{y-3}{y+2} \right = 2$ |
| g) $x(3x-2) = x^2 - 5x$ | h) $\frac{3x-1}{2} + \frac{4-2x}{3} = x+3$ | i) $\frac{2}{x-3} + \frac{4}{5-x} = 0$ |
| j) $4 - 3x - x^2 = (3x-2)^2 - 1$ | k) $2x^2(x^2 - 2x + 1) = x^3 + x - 2$ | l) $\frac{x^2 - 3x - 10}{3x+2} = 0$ |
| m) $1 - 2 y+3 = -4$ | n) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 = -11x + 6$ | o) $\sqrt{3x-1} + 2 = 4$ |
| p) $\sqrt{1-2x} = x+1$ | q) $x(x-1) + 5 = 1-x$ | r) $5-x = \sqrt{x+7}$ |

2) Halle el o los valores de x que satisfacen las siguientes ecuaciones logarítmicas y verifique:

- | | | |
|---|---|-----------------------------------|
| a) $\log_x 32 = 5$ | b) $\ln x = 3,7$ | c) $\log_3 x = 2$ |
| d) $\log_x 2 = -0,5$ | e) $\log x = 1,8965$ | f) $\ln x^2 = -2$ |
| g) $\log(x+1) - \log(x-2) - \log 2 = 0$ | h) $\ln x + \ln(x+6) = \frac{1}{2} \ln 9$ | i) $\frac{1}{3} \log_2(8+7x) = 2$ |

3) Tres hermanos se reparten \$ 13000. El mayor recibe el doble que el mediano, quien a su vez recibe el cuádruple que el pequeño. ¿Cuánto recibe cada uno?

4) En un estadio de fútbol hay 43200 personas. Si sabemos que hay 4800 locales más que visitantes, ¿cuántos locales y cuántos visitantes hay?

5) Se han consumido las $\frac{7}{8}$ partes de un bidón de agua. Añadiendo 38 litros se llena hasta las $\frac{3}{5}$ partes. Calcule la capacidad del bidón.

6) Un agricultor cuenta con \$ 500 000 en efectivo. Si abona un impuesto de \$ 25 000 y carga \$ 80 000 de gasoil, ¿cuántas toneladas de trigo podrá comprar a \$ 50 000 la tonelada?

7) En una huerta orgánica, la mitad de las hectáreas están sembradas con lechuga, la cuarta parte con zanahoria, la quinta parte con papa y el resto con zapallo. Si el campo tiene 25 hectáreas de lechuga, ¿cuántas hectáreas tiene sembradas con zapallo?

8) La magnitud R (en la escala de Richter) de un terremoto de intensidad I se define por $R = \log \frac{I}{I_0}$, donde I_0 es una intensidad mínima utilizada como punto de referencia. ¿Cuál fue la intensidad de un terremoto de magnitud de 7,8 en la escala de Richter?

9) El nivel n de la presión del sonido, está dado por la expresión $n = 20 \log \frac{p}{0,0002}$, donde p es la presión del sonido en dinas/cm².

- Determine el nivel si la presión del sonido es 0,0036 dinas/cm².
- Si el nivel es 10, ¿cuál es la presión del sonido?

3.2 Sistemas de ecuaciones lineales

En numerosos casos, las aplicaciones de la matemática en la resolución de problemas incluyen más de una variable. Si las relaciones entre dichas variables generan varias ecuaciones, es preciso resolverlas de manera simultánea. Por ejemplo, el clima depende de muchas variables como la temperatura, humedad, velocidad del viento, presión del aire. Para modelar el clima, y predecirlo, los científicos utilizan muchas ecuaciones y cada una de ellas contiene varias variables. Al conjunto resultante de ecuaciones con varias variables se lo llama **sistema de ecuaciones**.

A continuación, se presentan algunas definiciones que resultarán útiles para el desarrollo de este tema.

Ecuación lineal con dos incógnitas. Es una expresión de la forma: $ax + by + c = 0$ con a , b y c números reales y x e y incógnitas.

Nota. a y b se llaman coeficientes de las incógnitas y c término independiente. Los coeficientes y el término independiente son números reales conocidos.

Solución de una ecuación lineal con dos incógnitas. Son infinitos **pares ordenados** de números reales (x, y) que satisfacen la ecuación.

Si se sustituye a x e y en la ecuación por (x_1, y_1) y el primer miembro se hace igual al segundo, se dice que (x_1, y_1) es solución de la ecuación.

La **gráfica** de una ecuación lineal con dos incógnitas es una recta. Para su representación gráfica en un sistema de ejes cartesianos xy se puede seguir estos tres pasos:

1. Se encuentran dos pares ordenados cualesquiera que satisfagan la ecuación lineal dada.
2. Se marcan en el sistema de ejes.
3. Se unen mediante una línea recta.

Ejemplo. Represente la gráfica de la ecuación $2x - y = 3$ y verifique si los pares ordenados $(0, -3)$, $(2, 1)$ y $(1, 2)$ satisfacen la ecuación.

Solución.

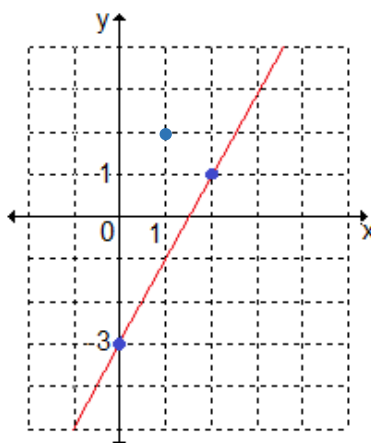
Los pares ordenados $(0, -3)$ y $(2, 1)$ satisfacen la ecuación ya que:

$$2 \cdot 0 - (-3) = 3 \Rightarrow 3 = 3 \quad \checkmark$$

$$2 \cdot 2 - 1 = 3 \Rightarrow 3 = 3 \quad \checkmark$$

Mientras que el par ordenado $(1, 2)$ no es solución de la ecuación $2x - y = 3$ porque $2 \cdot 1 - 2 \neq 3$.

A continuación, junto a la gráfica de la ecuación, se marcan esos pares ordenados en un sistema de ejes.



Sistema de ecuaciones lineales: es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales.

La **solución** de un sistema son los valores de las incógnitas que hacen verdadera cada una de las ecuaciones simultáneamente.

En este apartado se estudia cómo resolver problemas de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

La solución, si existe, de estos tipos de sistemas es de la forma (x_1, y_1) y satisface simultáneamente todas las ecuaciones del mismo.

Ejemplo. Verifique que el par ordenado $(3, 1)$ es solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ x + 4y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución.

Para comprobar que $x = 3$ e $y = 1$ es una solución del sistema, se debe reemplazar el valor de ambas incógnitas en las dos ecuaciones y ver que satisfacen la igualdad.

$$2x - y = 5$$

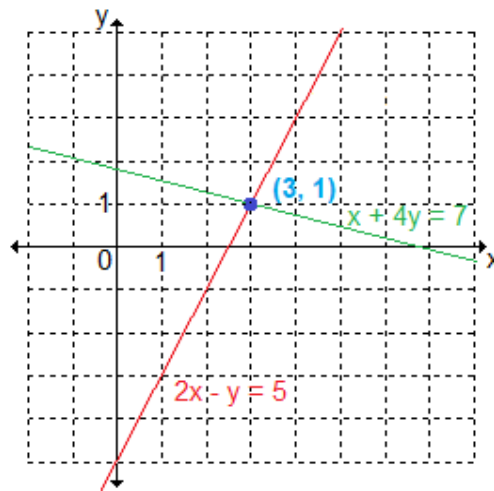
$$2 \cdot 3 - 1 = 5 \quad \checkmark$$

$$x + 4y = 7$$

$$3 + 4 \cdot 1 = 7 \quad \checkmark$$

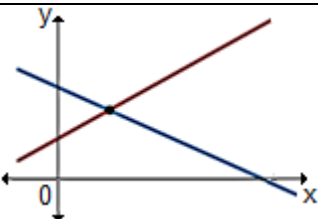
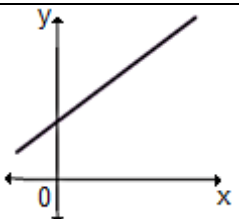
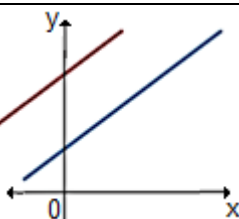
La solución es el par ordenado $(3, 1)$.

Se observa en la siguiente figura, que las gráficas de las Ecuaciones 1 y 2 son rectas y la solución $(3, 1)$ corresponde al punto en común que poseen las rectas, es decir, el punto de intersección entre ellas.



Al resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas se puede obtener tres tipos de soluciones, por lo cual, se clasifican (de acuerdo a las soluciones) de la siguiente manera:

Clasificación de sistemas

Sistema compatible determinado (una única solución)	Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)	Sistema incompatible (no tiene solución)
 Rectas secantes	 Rectas coincidentes	 Rectas paralelas

Métodos analíticos de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Existen diferentes métodos de resolución. A continuación, se detallan algunos.

Método de sustitución

Este método consiste en realizar los siguientes pasos:

- 1. Despejar una incógnita.** Se escoge una ecuación y se despeja una incógnita en términos de la otra.
- 2. Sustituir y resolver.** Se sustituye la expresión hallada en el Paso 1 en la otra ecuación, para obtener una ecuación con una incógnita y, a continuación, se despeja esa incógnita.
- 3. Hallar el valor de la otra incógnita.** En cualquiera de las ecuaciones se sustituye el valor hallado en el Paso 2 para despejar la incógnita restante.

Ejemplo.

Encuentre todas las soluciones del sistema $\begin{cases} 2x + y = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 3x + 4y = 14 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$

Solución.

Se despeja, por ejemplo, y en la primera ecuación: $y = 1 - 2x$

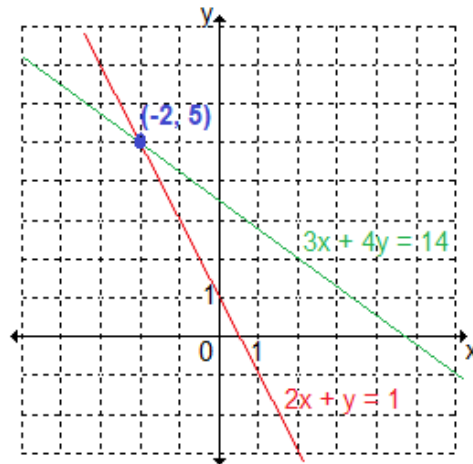
Se sustituye y en la segunda ecuación y se despeja x:

$$\begin{aligned}
 3x + 4 \cdot (1 - 2x) &= 14 \\
 3x + 4 - 8x &= 14 \\
 -5x + 4 &= 14 \\
 -5x &= 14 - 4 \\
 -5x &= 10 \\
 x &= 10 : (-5) \\
 x &= -2
 \end{aligned}$$

A continuación, se sustituye $x = -2$ en una de las ecuaciones, en particular, en la ecuación 1 donde la incógnita y ya se encuentra despejada:

$$\begin{aligned}
 y &= 1 - 2x \\
 y &= 1 - 2 \cdot (-2) \\
 y &= 5
 \end{aligned}$$

Entonces, $x = -2$ e $y = 5$, de modo que la solución es el par ordenado $(-2, 5)$. La figura muestra que el punto de intersección de las rectas es el punto $(-2, 5)$.



Método de igualación

Este método consiste en realizar los siguientes pasos:

- 1. Despejar la incógnita.** Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
- 2. Igualar y resolver.** Se igualan las expresiones halladas en el Paso 1, para obtener una ecuación con una incógnita y, a continuación, se despeja esa incógnita.
- 3. Hallar el valor de la otra incógnita.** En cualquiera de las ecuaciones se sustituye el valor hallado en el Paso 2 para despejar la incógnita restante.

Ejemplo. Encuentre todas las soluciones del sistema
$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 & \text{Ecuación 1} \\ x - 2y = 2 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución.

Se despeja, por ejemplo, x en ambas ecuaciones:
$$x = \frac{14}{3} - \frac{2}{3}y$$
$$x = 2 + 2y$$

Se igualan ambas expresiones y se despeja la incógnita y:

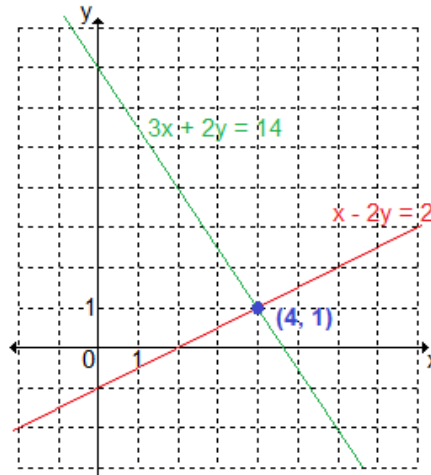
$$\begin{aligned} \frac{14}{3} - \frac{2}{3}y &= 2 + 2y \\ -\frac{2}{3}y - 2y &= 2 - \frac{14}{3} \\ -\frac{8}{3}y &= -\frac{8}{3} \\ y &= -\frac{8}{3} : \left(-\frac{8}{3}\right) \Rightarrow y = 1 \end{aligned}$$

A continuación, se sustituye $y = 1$ en una de las ecuaciones, por ejemplo, en la ecuación 2:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ x - 2 \cdot (1) &= 2 \\ x - 2 &= 2 \\ x &= 2 + 2 \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

Entonces, $x = 4$ e $y = 1$, de modo que la solución es el par ordenado $(4, 1)$. La figura muestra que el punto de intersección de las rectas es el punto $(4, 1)$. El sistema se lo clasifica como **compatible determinado**.

Resolución gráfica:



Ejemplo. Sistema de ecuaciones con infinitas soluciones $\begin{cases} y - 4x = 3 & \text{Ecuación 1} \\ -2y + 8x = -6 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$

Solución.

Si se despeja la incógnita y de ambas ecuaciones se obtiene de la primera ecuación $y = 4x + 3$ y en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} -2y &= -8x - 6 \\ y &= (-8x - 6) : (-2) \\ y &= 4x + 3 \end{aligned}$$

Se observa que la representación gráfica de ambas ecuaciones es la misma recta, por lo tanto, cada punto perteneciente a la recta es solución del sistema, lo que significa que el sistema tiene infinitas soluciones. Este sistema se lo clasifica como **compatible indeterminado**.

Ejemplo. Sistema de ecuaciones sin solución $\begin{cases} y - 2x = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 4y - 8x = -12 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$

Solución.

Si se despeja la incógnita y de ambas ecuaciones se obtiene de la primera ecuación $y = 2x + 1$ y en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 4y &= 8x - 12 \\ y &= (8x - 12) : 4 \\ y &= 2x - 3 \end{aligned}$$

Ambas ecuaciones representan rectas paralelas, puesto que poseen igual pendiente y diferente ordenada al origen, de modo que no poseen puntos en común y el sistema no tiene solución. Se lo clasifica como **incompatible**.

Ejemplo. Un agricultor tiene 800 hectáreas en las que produce trigo y maíz. Cuesta 40 dólares por hectárea producir maíz y 60 dólares por hectárea producir trigo. Si el productor tiene asignado 39000 dólares para invertir en sus cosechas. ¿Cuántas hectáreas de cada cultivo debe plantar?

Solución.

Teniendo en cuenta los pasos a seguir para resolver un problema:

- COMPRENDER el problema.

Incógnitas: Se pide determinar la cantidad de hectáreas de cada cultivo que se deben plantar según las hectáreas disponibles y el presupuesto asignado, por lo que planteamos las incógnitas:

x: cantidad de hectáreas de trigo.

y: cantidad de hectáreas de maíz.

Datos. el costo de producir una hectárea de cada cultivo, la cantidad de hectáreas disponibles y el dinero disponible.

- CONCEBIR y EJECUTAR un plan.

Se puede plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: una ecuación para las hectáreas disponibles y la otra para el presupuesto asignado, y luego resolverlo por cualquiera de los métodos vistos:

$$\begin{cases} x + y = 800 \\ 60x + 40y = 39\,000 \end{cases}$$

Despejando de la primera ecuación la incógnita **x** resulta: $x = 800 - y$ **(1)**

Sustituyendo dicha incógnita en la segunda ecuación y resolviendo se obtiene:

$$60 \cdot (800 - y) + 40y = 39\,000 \Rightarrow 48\,000 - 60y + 40y = 39\,000 \Rightarrow -20y = -9\,000 \Rightarrow y = -9\,000 : (-20) \Rightarrow y = 450$$

Reemplazando la incógnita **y** en **(1)**: $x = 800 - 450 \Rightarrow x = 350$

- EXAMINAR la solución obtenida y ELABORAR CONCLUSIONES.

Se puede verificar que $x = 350$ e $y = 450$ satisface las condiciones planteadas:

- la cantidad de hectáreas disponibles: $350 + 450 = 800$
- el dinero disponible: $60 \cdot 350 + 40 \cdot 450 = 39\,000$

De esta manera, podemos escribir la respuesta a la situación planteada.

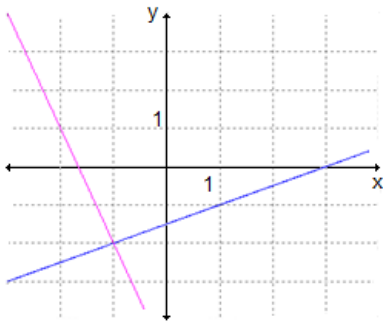
Respuesta. Se deben plantar 350 hectáreas de trigo y 450 hectáreas de maíz.

ACTIVIDADES SECCIÓN 3.2

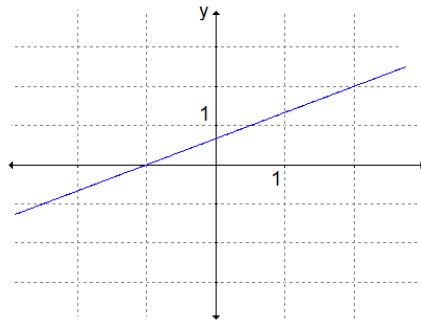
1) Relacione cada sistema con su gráfica correspondiente:

a) $\begin{cases} 3x + y = -5 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 3y = 7 \end{cases}$	c) $\begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ x - 1,5y = -1 \end{cases}$	d) $\begin{cases} -x + 2y = 5 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$	e) $\begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ 6y - 4x = 6 \end{cases}$	f) $\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$
--	--	--	---	--	--

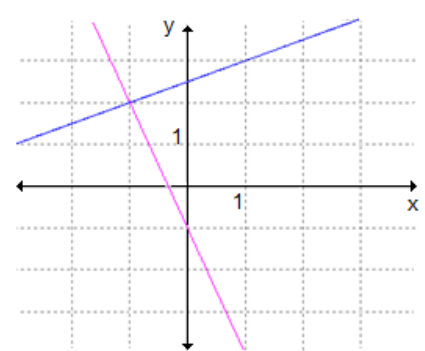
I



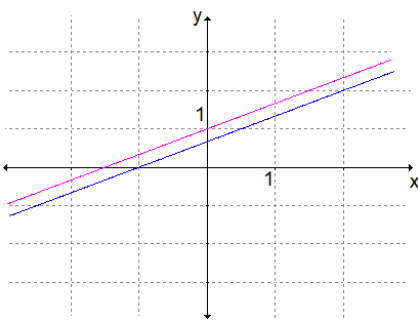
II



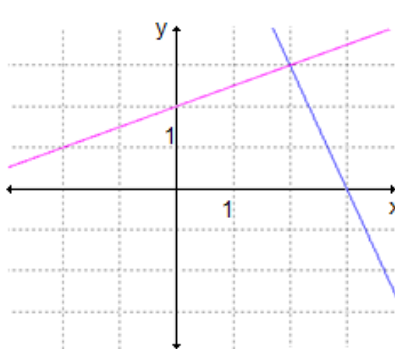
III



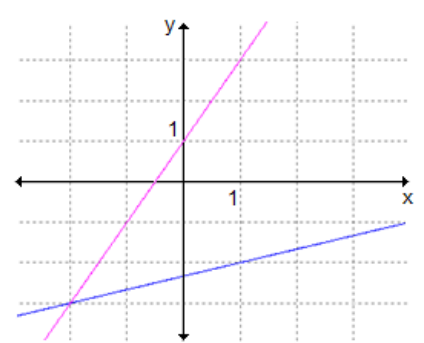
IV



V



VI



2) Para cada par de valores dado, determine si es solución del sistema $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

- a) (4, -2) b) (0, -1) c) (2, 3)

3) Si (3, 1) es solución del sistema $\begin{cases} mx + 4y = 13 \\ x - ny = 2 \end{cases}$, ¿es correcto decir que $m = 3$ y $n = -1$? Justifica tu respuesta.

4) Resuelva y clasifique los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} y - x = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + \frac{1}{2}y = -5 \\ 2x = 10 + y \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + \frac{3}{2}y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x = -6y \\ -3x - 9y = 18 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -3y + 2x = 9 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 12x + 15y = -18 \\ 2x + \frac{5}{2}y = -3 \end{cases}$

5) En una feria rural se vendieron dos tipos de entradas: las generales, que costaban \$ 3000 y las destinadas a productores con un valor de \$5000. Al finalizar la jornada, se recaudaron \$ 1 450 000 y se vendieron en total 400 entradas.

a) Complete el sistema que modela la situación: $\begin{cases} x + y = \underline{\hspace{2cm}} \\ 3000x + \underline{\hspace{2cm}}y = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$

b) Identifique qué representa cada incógnita.

c) Resuelva el sistema.

6) Para cada situación, solo identifique incógnitas y plantee el sistema de ecuaciones. No lo resuelva.

a) Un productor adquiere bidones de herbicida de 5 litros y de 20 litros. Compra 50 bidones y en total obtiene 1360 litros.

b) En un vivero se venden plantas de \$ 5000 y arbustos de \$ 12000. En total, se recaudaron \$ 360 000 vendiendo 40 unidades.

- c) Una persona invierte un total de \$ 10 000 000. Una parte la coloca a un interés anual del 4 % y el resto a un 6 %. Al finalizar el año, obtiene una ganancia total de \$ 825 000.
- 7) Encuentre dos números cuya suma es 34 y cuya diferencia es 10.
- 8) La suma de dos números es el doble de su diferencia. El número mayor es igual a 6 unidades más que el doble del más pequeño. Encuentre los números.
- 9) Un hombre tiene 27 billetes en su bolsillo, los cuales son de \$ 100 y de \$ 500. Si el valor total es \$ 9100, ¿cuántos billetes de cada tipo tiene?
- 10) Hace 5 años la edad de una persona era igual al triple de la otra y dentro de 5 años solo será el doble. ¿Qué edad tiene cada una?
- 11) El numerador de cierta fracción es 5 unidades mayor que el denominador. El numerador se disminuye en 9 y el denominador se aumenta en 1, la fracción resultante es un medio. ¿Cuál es la fracción original?
- 12) Halle el valor de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo si la diferencia entre ambos es 18°.
- 13) Una granja tiene, entre cerdos y pavos, en total 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos cerdos y cuántos pavos hay?
- 14) En un rectángulo la altura es dos centímetros mayor que su base. Sabiendo que su perímetro es de 24 cm, determine las medidas de su base, su altura y su área.
- 15) En un concierto benéfico se venden todas las entradas y se recaudan 104 000 dólares. Los precios de las entradas son de 50 dólares las normales y 90 dólares las vip. ¿Cuántas entradas de cada tipo se vendieron si el aforo del establecimiento es de 1 600 personas?
- 16) En una semana un mercado de productos agrícolas vendió 60 fertilizantes para césped de las marcas A y B. Los de la marca A se vendieron a \$ 1 200 cada uno y los de la marca B, a \$ 1 050 cada uno. Si las ventas totales en este rubro fueron de \$ 66 000, ¿cuántos fertilizantes se vendieron de cada tipo?
- 17) Se compraron 150 bolsas de herbicida, algunas contienen herbicidas de tipo A y otras de tipo B. Si se hubieran comprado 10 bolsas más de los herbicidas de tipo A, el número de dichas bolsas hubiese sido el triple de las que contienen el herbicida tipo B. ¿Cuántas bolsas se compraron de cada tipo de herbicida?

3.3 Inecuaciones

En muchas situaciones o problemas surge la necesidad de modelar relaciones de “menor o mayor que”.

Ejemplo. Expresar el siguiente enunciado en lenguaje matemático: La cosecha de trigo es, a lo sumo, de 375 toneladas.

Solución.

Llamando con x a la cosecha de trigo, la expresión *a lo sumo* indica que no puede superar las 375 toneladas y se puede expresar simbólicamente: $x \leq 375$. **(1)**

Pero además la cosecha mínima es de 0 toneladas, es decir, $x \geq 0$. **(2)**

Las expresiones **(1)** y **(2)** se pueden escribir como: $0 \leq x \leq 375$

Una **desigualdad** es una expresión que contiene alguno de los siguientes símbolos de orden:

$<$ (menor), $>$ (mayor), $\leq$ (menor o igual), $\geq$ (mayor o igual).

Definición. Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas conteniendo uno o más valores desconocidos.

Las siguientes desigualdades son ejemplos de inecuaciones:

$$x^2 - 2 \leq 5x + 1 \quad ; \quad 3x + 2x - 1 > 0 \quad ; \quad x^4 - 3 < x^3 + 2x \quad ; \quad (x - 2)(x + 3) \geq 0$$

Las **soluciones** de una inecuación son todos los valores que hacen que la desigualdad sea cierta. Al igual que en el caso de las ecuaciones, cuando la inecuación esté modelando un problema concreto, se elige entre las soluciones de la inecuación, aquellas que tienen sentido en el contexto del problema. La diferencia esencial con las ecuaciones, es que las inecuaciones suelen tener infinitas soluciones. El conjunto formado por todas las soluciones de la ecuación se llama **conjunto solución** y suele representarse mediante la notación de intervalo.

El proceso de resolución de inecuaciones se basa (igual que en el caso de las ecuaciones) en la transformación de la inecuación inicial en otra equivalente más sencilla. Para esto, se debe recordar algunas de las propiedades de las desigualdades:

$$\begin{aligned} \text{Si } x < y & \text{ entonces } x + c < y + c, \text{ para cualquier } c \text{ real.} \\ \text{Si } x < y & \text{ entonces } x \cdot c < y \cdot c, \text{ para cualquier } c > 0. \\ \text{Si } x < y & \text{ entonces } x \cdot c > y \cdot c, \text{ para cualquier } c < 0 (*). \end{aligned}$$

¡Atención! Observe que el signo de desigualdad se invierte al multiplicar por un número negativo.

En palabras:

- Al sumar el mismo número en ambos miembros de una desigualdad, ésta se mantiene.
- Al multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un mismo número debemos ser cuidadosos porque se invierte el sentido si el factor es negativo.

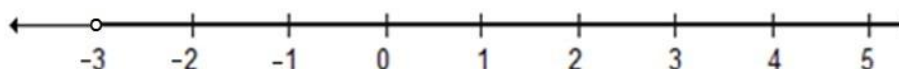
Nota. Las mismas propiedades valen con los signos de $\leq$ o $\geq$.

Ejemplo. Resuelva la inecuación $-2x + 1 < 7$

Solución.

$$\begin{aligned} -2x + 1 &< 7 \\ -2x &< 7 - 1 \\ -2x &< 6 \\ x &> 6 : (-2) \text{ ¡Advertencia! Recuerde invertir el signo, por la propiedad (*)} \\ x &> -3 \end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución está formado por todos los números reales mayores a -3 , el cual puede expresarse como el intervalo $(-3; \infty)$, y representarse gráficamente como:



Ejemplo. Una compañía de transporte tiene una flota de camiones cuyo costo de funcionamiento por cada camión se estima en $c(m) = 0,5m + 1400$. Dicho costo está expresado en dólares y m es la cantidad de kilómetros recorridos. Si la compañía quiere que dicho costo por camión no supere los 6000 dólares, ¿cuál es el tope máximo de kilómetros que puede recorrer?

Solución.

El costo no debe superar los 6000 dólares, es decir, debe ser menor o a lo sumo igual que 6000 dólares. Por ello planteamos: $c(m) \leq 6000 \Rightarrow 0,5m + 1400 \leq 6000$

Aplicando propiedades de las desigualdades:

$$\begin{aligned} 0,5m &\leq 6000 - 1400 \\ 0,5m &\leq 4600 \\ m &\leq 4600 : 0,5 \\ m &\leq 9200 \end{aligned}$$

Respuesta. Cada camión puede recorrer hasta 9200 kilómetros para que el costo no supere 6000 dólares.

Ejemplo. La relación existente entre temperaturas medidas en las escalas Celsius y Fahrenheit está dada por $F = 1,8C + 32$. ¿Entre qué valores varía la temperatura en grados Celsius (C) si $68 \leq F \leq 86$?

Solución.

Si la temperatura en grados Fahrenheit (F) varía entre 68 y 86, debemos hallar entre qué valores lo hace medida en grados Celsius. Si partimos de $68 \leq F \leq 86$ y reemplazamos F por $1,8C + 32$, resulta:

$$68 \leq 1,8C + 32 \leq 86$$

Despejamos C restando 32 a cada miembro: $68 - 32 \leq 1,8C \leq 86 - 32$

Dividiendo por 1,8 la desigualdad no cambia de sentido ya que es positivo y obtenemos:

$$\frac{68 - 32}{1,8} \leq C \leq \frac{86 - 32}{1,8}$$

Resolviendo se obtiene:

$$20 \leq C \leq 30$$

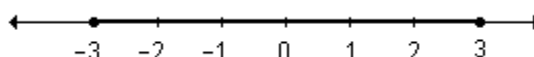
Respuesta. La temperatura en grados Celsius varía entre 20 y 30 mientras que en grados Fahrenheit lo hace entre 68 y 86.

Ejemplo. Resuelva la inecuación $|x| \leq 3$

Solución.

Los valores de x que satisfacen la desigualdad son todos los que se encuentran a una distancia del cero menor o igual a tres unidades. Por lo tanto, el conjunto solución está formado por -3, 3 y todos los números reales comprendidos entre ellos. Resulta el intervalo cerrado $[-3, 3]$.

$$S = \{ x / -3 \leq x \leq 3 \} = [-3, 3]$$

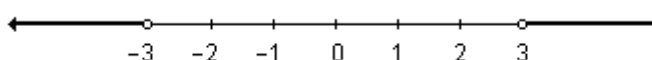


Ejemplo. Resuelva la inecuación $|x| > 3$

Solución.

Realizando el mismo análisis que en el ejemplo anterior, resulta que los valores de x que verifican la desigualdad son aquellos que están a más de 3 unidades del origen. La solución es el conjunto de los números reales mayores que 3 o menores que -3. La solución se puede escribir como unión de dos intervalos abiertos: $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

$$S = \{ x / x < -3 \text{ ó } x > 3 \} = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$



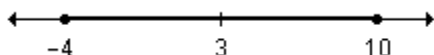
Ejemplo. Resuelva la inecuación $|x - 3| \leq 7$

Solución.

Teniendo en cuenta la propiedad: $|a| \leq b$ si y sólo si $-b \leq a \leq b$, resulta que:

$$-7 \leq x - 3 \leq 7 \Rightarrow -7 + 3 \leq x \leq 7 + 3 \Rightarrow -4 \leq x \leq 10$$

La solución es el intervalo cerrado $[-4, 10]$. Geométricamente representa el conjunto de puntos de la recta cuya distancia a 3 es menor o igual que 7.



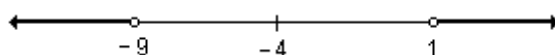
Ejemplo. Resuelva la inecuación $|x + 4| > 5$

Solución.

Teniendo en cuenta la propiedad $|a| \geq b$ si y sólo si $a \geq b$ o $a \leq -b$, resulta:

$$\begin{aligned} x + 4 > 5 & \quad \text{ó} \quad x + 4 < -5 \\ x > 1 & \quad \text{ó} \quad x < -9 \end{aligned}$$

Geométricamente representa el conjunto de puntos de la recta cuya distancia a -4 es mayor que 5. La solución está representada por la unión de los intervalos abiertos: $(-\infty, -9) \cup (1, \infty)$.



ACTIVIDADES SECCIÓN 3.3.

1) Resuelva las siguientes inecuaciones. Escriba la solución en forma de intervalo y represéntelo gráficamente:

a) $4(x - 1) + 3 > 2$

b) $3(x + 2) - 1 \leq 17$

c) $\frac{3x - 1}{4} + 2 < x$

d) $(4x - 20) : (-4) \geq 3x$

e) $2(x - 1)^2 + 3 < 2x^2 + 4$

f) $3x(x + 2) > 1 - 2x + 3x^2$

g) $|x + 1| \leq 3$

h) $|x - 2| < 5$

i) $|x - 1| \geq 2$

2) Escriba la inecuación que le permita plantear cada una de las siguientes situaciones:

a) El peso máximo de carga que transporta cierto camión es de 5 500 kg.

b) La cantidad de hectáreas sembradas con trigo superó las 200.

c) La cuarta parte de la cantidad de soja es, a lo sumo, de 100 toneladas.

3) Marcelo necesita un televisor y un equipo de sonido. Puede gastar, en total, \$ 196 000. El televisor que le interesa vale \$ 75 000 más el 12 % de impuestos. ¿Cuál es el precio de lista máximo que puede tener el equipo de sonido sin exceder el dinero disponible? Tener en cuenta que en el precio de lista no está incluido el impuesto.

4) Un vendedor de seguros, por cada seguro de 90 dólares vendido, gana el 12 % de comisión.

a) ¿Cuántos seguros debe vender para ganar por lo menos 270 dólares al mes, si trabaja por comisión únicamente? ¿Si percibe 100 dólares mensuales más la comisión?

b) Si le ofrecen elegir entre una comisión directa del 15 % de todas las ventas o 126 dólares más el 10 % de todas las ventas, ¿cuántos seguros deben ser vendidos para que el plan de la comisión directa sea la mejor elección?

RESPUESTAS CAPÍTULO 3

RESPUESTAS SECCIÓN 3.1

1)a) $x = -2$

b) $x = \frac{8}{11}$

c) $y = -1$

d) $x = -2$; $x = \frac{8}{5}$

e) Las únicas soluciones reales son $x = 1$ y $x = 2$

f) $y = -7$; $y = -\frac{1}{3}$

g) $x = -\frac{3}{2}$; $x = 0$

h) $x = -13$ i) $x = 1$ j) $x = -\frac{1}{10}$; $x = 1$ k) Las únicas soluciones reales son $x = 1$ y $x = 2$.

l) $x = -2$; $x = 5$ m) $y = -\frac{11}{2}$; $y = -\frac{1}{2}$ n) $x = -2$; $x = 1$; $x = 3$ o) $x = \frac{5}{3}$ p) $x = 0$

q) No tiene soluciones reales. r) $x = 2$

2)a) $x = 2$ b) $x = 40,447$ c) $x = \frac{9}{4}$ d) $x = \frac{1}{4}$

e) $x = 78,795$ f) $x = 0,368 = e^{-1}$ g) $x = 5$ h) $x = 0,46$ i) $x = 8$

3) El mayor recibe \$ 8000, el mediano \$ 4000 y el pequeño \$ 1000.

4) Hay 19 200 visitantes y 24 000 locales.

5) La capacidad del bidón es de 80 litros.

6) El agricultor podrá comprar 7,9 toneladas.

7) El campo tiene 2,5 hectáreas sembradas con zapallo.

8) Aproximadamente $6,3 \cdot 10^7 I_0$

9) a) El nivel de presión es 25,11, aproximadamente.

b) Si el nivel es 10 la presión del sonido es $0,00063 \text{ dinas/cm}^2$, aproximadamente.

RESPUESTAS SECCIÓN 3.2

1)a) con I b) con VI c) con II d) con III e) con IV f) con V

2) (2, 3) si es solución, los demás no.

3) No es correcto, ya que si (3, 1) es solución del sistema debe satisfacer simultáneamente ambas ecuaciones y solo lo hace con la primera.

4)a) $\left(-\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$ Sistema compatible determinado

b) Infinitas soluciones. Sistema compatible indeterminado c) No tiene solución. Sistema incompatible

d) (2, 1) Sistema compatible determinado e) No tiene solución. Sistema incompatible

f) (3, -1) Sistema compatible determinado g) (2, 0) Sistema compatible determinado

h) Infinitas soluciones. Sistema compatible indeterminado

5)a) $\begin{cases} x + y = 400 \\ 3000x + 5000y = 1\,450\,000 \end{cases}$

b) x representa la cantidad de entradas generales vendidas mientras que y , la cantidad de entradas de los productores.

c) Se vendieron 275 entradas generales y 125 entradas de los productores.

6) Para cada situación, *solo identifique incógnitas y plantee* el sistema de ecuaciones. No lo resuelva.

a) Incógnitas: x = cantidad de bidones de 5 litros e y = cantidad de bidones de 20 litros.

El sistema es: $\begin{cases} x + y = 50 \\ 5x + 20y = 1360 \end{cases}$

b) Incógnitas: x = cantidad de plantas e y = cantidad de arbustos.

El sistema es: $\begin{cases} x + y = 40 \\ 5000x + 12000y = 360\,000 \end{cases}$

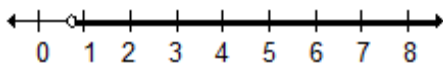
c) Incógnitas: x = monto de dinero invertido con un interés anual del 4 % e y = monto de dinero invertido con un interés anual del 6 %.

El sistema es: $\begin{cases} x + y = 10\,000\,000 \\ 0,04x + 0,06y = 825\,000 \end{cases}$

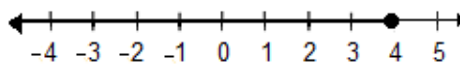
- 7) Los números son 22 y 12.
- 8) Los números son 18 y 6.
- 9) 11 billetes de \$ 100 y 16 billetes de \$ 500.
- 10) Tienen 35 y 15 años.
- 11) La fracción original es $\frac{14}{9}$.
- 12) Los ángulos agudos del triángulo rectángulo miden 54° y 36° .
- 13) La granja tiene 23 cerdos y 12 pavos.
- 14) La base del rectángulo mide 5 cm, la altura, 7cm y su área es de 35 cm^2 .
- 15) Se vendieron 1000 entradas normales y 600 entradas vip.
- 16) De la marca A se vendieron 20 fertilizantes y de la marca B, 40 fertilizantes.
- 17) Se compraron 110 bolsas del herbicida tipo A y 40 bolsas del herbicida tipo B.

RESPUESTAS SECCIÓN 3.3

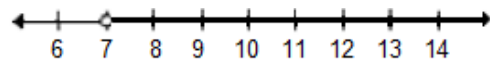
1)a) $\left(\frac{3}{4}; \infty\right)$



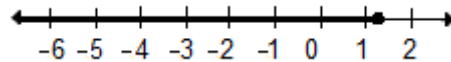
b) $(-\infty; 4]$



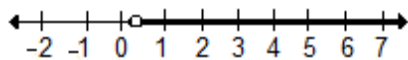
c) $(7; \infty)$



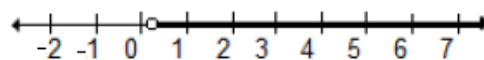
d) $\left(-\infty; \frac{5}{4}\right]$



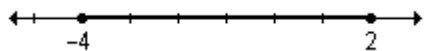
e) $\left(\frac{1}{4}; \infty\right)$



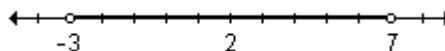
f) $\left(\frac{1}{8}; \infty\right)$



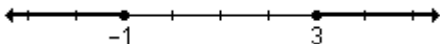
g) $[-4, 2]$



h) $(-3, 7)$



i) $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$



2)a) $0 \leq x \leq 5\,500$

b) $x > 200$

c) $0 \leq \frac{1}{4}x \leq 100$

3) El precio del equipo de sonido no puede exceder los 100 000 pesos.

4)a) Si trabaja únicamente por comisión debe vender al mes, como mínimo, 25 seguros. Si percibe 100 dólares mensuales más la comisión, debe vender como mínimo 16 seguros.

b) Deberá vender más de 28 seguros mensuales.